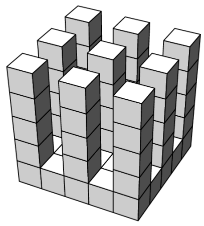
Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2014
Feladatok 11-12. osztályosok részére

3 pontos feladatok

1. Egy 5×5×5-ös kockából elvettünk néhány 1×1×1-es kis kockát. Az így kapott test néhány egyforma magas oszlopot tartalmaz, amelyek ugyanazon a sík alapon állnak (lásd ábra). Hány kis kockát vettünk el?



A) 56 B) 60 C) 64 D) 68 E) 80

2. Klári, Lilla és Emma ma ünnepli a születésnapját. Életkoraik összege 44 év. Hány év lesz az életkoraik összege azon a születésnapjukon, amikor ez az összeg legközelebb újra egy olyan kétjegyű szám lesz, amely két egyforma számjegyből áll?

A) 55 B) 66 C) 77 D) 88 E) 99

3. Mennyivel egyenlő x^{-3y}, ha $x^y = \frac{1}{2}$?

A) $\frac{1}{8}$ B) 8 C) –8 D) 6 E) $\frac{1}{6}$

4. Három különböző méretű kosárban összesen 48 alma van. A legkisebb és a legnagyobb kosárban együttesen kétszer annyi alma van, mint a közepesben. A legkisebb kosárban fele annyi alma van, mint a közepesben. Hány alma van a legnagyobb kosárban?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32

5. Mennyi a következő tört értéke: $\frac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}$?

A) 1 B) 2 C) 2^{2011} D) 2^{2012} E) 2^{2013}

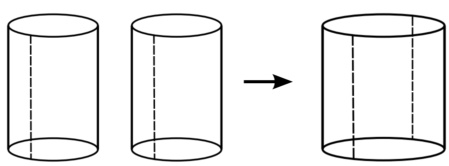
6. A Kenguru versenyt a világ olyan sok országában megrendezik, hogy lehetetlen egy időpontban kezdeni mindenhol. Amikor Londonban dél van, akkor Bogotában (Kolumbia) reggel 7 óra van, Karachiban (Pakisztán) pedig délután 5 óra. Mennyi az idő Karachiban, amikor Bogotában este 9 óra van?

A) 7:00 B) 9:00 C) 11:00 D) 13:00 E) 19:00

7. Hány jegyű szám tízes számrendszerben a következő kifejezés értéke: $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2$?

A) 22 B) 55 C) 77 D) 110 E) 111

8. Két egybevágó egyenes körhenger palástját az ábrán szaggatott vonallal jelölt alkotók mentén elvágjuk, majd veszteség nélkül összeragasztjuk őket egy nagyobb körhenger palástjává. Hányszorosa lesz az így kapott henger térfogata az egyik eredeti henger térfogatának?



A) 2 B) 3 C) π D) 4 E) 8

9. Az idei évszámban a számjegyek különbözőek és az utolsó számjegy nagyobb, mint a másik három számjegy összege. Hány évvel ezelőtt fordult ez elő utoljára?

A) 5 B) 215 C) 305 D) 395 E) 485

10. Csini Csillának van egy titkos email címe, amelyen csak négy barátjával levelez. Ma 8 levél érkezett erre a címre. Az alábbi állítások közül melyik teljesült biztosan?

A) Csilla mindegyik barátjától pontosan két levelet kapott.
B) Csilla egyik barátjától sem kapott nyolc levelet.
C) Csilla mindegyik barátjától kapott legalább egy levelet.
D) Csilla legalább az egyik barátjától legalább két levelet kapott.
E) Csilla legalább két barátjától fejenként legalább két levelet kapott.

4 pontos feladatok

11. Egy téglatest egyik csúcsból induló 3 éléről tudjuk, hogy $a<b<c$. Ha a téglatest valamely négy egyforma hosszú élét egyaránt 1 cm-rel megnöveljük, a téglatest térfogata is megnő. Melyik él hosszát növeljük meg, ha azt szeretnénk, hogy az így kapott téglatest térfogata a lehető legnagyobb legyen?

A) a B) b C) c D) Az a, b és c értékétől függ.
E) Bármelyiket növeljük meg, a térfogat ugyanannyival nő.

12. Egy focibajnokságon négy csapat indult. Minden csapat mindegyik másikkal játszott egy meccset. A győztes 3 pontot kapott, a vesztes nem kapott pontot, döntetlen esetén pedig mindkét csapat 1-1 pontot kapott. A bajnokság végén az egyik csapatnak 7 pontja volt, másik két csapatnak 4-4 pontja. Hány pontja volt a negyedik csapatnak?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

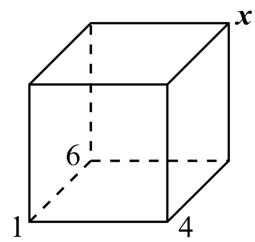
13. Hány olyan egész számokból álló rendezett $(a;b;c)$ számhármas van, amelyre $a>b>c>1$ és $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) végtelen sok

14. A nullától különböző a, b, c valós számokról és az n pozitív egész számról tudjuk, hogy a $(-2)^{2n+3}\cdot a^{2n+2}\cdot b^{2n-1}\cdot c^{3n+2}$ és a $(-3)^{2n+2}\cdot a^{4n+1}\cdot b^{2n+5}\cdot c^{3n-4}$ kifejezés előjele megegyezik. Az alábbi relációk közül melyik igaz biztosan?

A) $a>0$ B) $b>0$ C) $c>0$ D) $a<0$ E) $b<0$

15. Egy kocka csúcsaira különböző, 8-nál nem nagyobb pozitív egész számokat írunk úgy, hogy az egy laphoz tartozó négy csúcshoz írt számok összege mindegyik lapon ugyanannyi. Az 1, 4, 6 számokat már felírtuk az ábrának megfelelően. Melyik szám kerül az x-szel jelölt csúcshoz?



A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 8

16. Hat hét éppen $n!$ másodpercből áll. Mennyi az n értéke?
($n!$ az n-nél nem nagyobb pozitív egész számok szorzata.)

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

17. Tomi leírt néhány különböző, 100-nál nem nagyobb pozitív egész számot, melyek szorzata nem osztható 54-gyel. Legfeljebb hány számot írhatott le Tomi?

A) 8 B) 17 C) 68 D) 69 E) 90

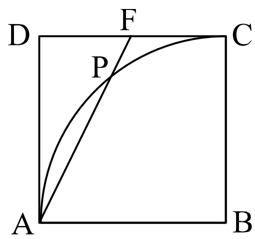
18. Két szabályos, 1 cm oldalú sokszög a közös *AB* oldal egyenesének két különböző félsíkjában fekszik. Az egyik sokszög 15 oldalú, és *B*-vel szomszédos másik csúcsa *C*, a másik sokszög *n* oldalú, és *B* melletti másik csúcsa *D*. Mennyi az *n* értéke, ha a *CD* szakasz 1 cm hosszú?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

19. Tíz különböző pozitív egész szám közül pontosan öt osztható 5-tel és pontosan hét osztható 7-tel. Jelöljük M-mel a tíz szám közül a legnagyobbat. Mennyi az M lehető legkisebb értéke?

A) 105 B) 77 C) 75 D) 63 E) más érték

20. Az *ABCD* négyzet minden oldala $2\sqrt{5}$ cm hosszú, a *CD* oldal felezőpontja *F*, a *B* középpontú, *AB* sugarú körív és az *AF* szakasz metszéspontja *P*. Hány cm hosszúságú a *PF* szakasz?



A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

D) 1 E) más érték

5 pontos feladatok

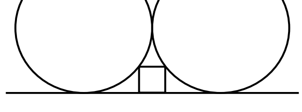
21. A valós számok halmazán értelmezett $f(x)=ax+b$ függvényről tudjuk, hogy egyrészt $f(f(f(1)))=29$, másrészt $f(f(f(0)))=2$. Az *a* és a *b* valós paraméterek. Mennyi a *b* paraméter értéke?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{13}{17}$ E) 1

22. Bergengóciában él kilenc kenguru, akiket csodakangáknak hívnak. Mindegyikük vagy arany, vagy ezüst színű. Ha három csodakanga találkozik, akkor $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy egyikük sem ezüst színű. Hány arany színű csodakanga él Bergengóciában?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

23. Az ábrán látható két egymást érintő kör sugara 1 cm. A négyzet két szomszédos csúcsa a két kör közös érintőjén, másik két csúcsa az egyik, illetve a másik körön fekszik. Hány cm a négyzet oldala?



A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

24. A *k*, *m*, *n* pozitív egészekre teljesül, hogy $k=(2014+m)^{\frac{1}{n}}=1024^{\frac{1}{n}}+1$. Hány különböző értéket vehet fel az *m*?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) végtelen sok

25. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB = AC$. Az A-ból induló magasság talppontja A_1, a B-ből indulóé B_1. A háromszög magasságpontja M. Mennyi az AA_1 és a BB_1 szakaszok hosszának aránya, ha $AM : MA_1 = 7:1$ és $BM : MB_1 = 9:7$?

A) 3:2 B) 17:10 C) 2:1 D) 5:2 E) 3:1

26. Az egész számok halmazán értelmezett f függvényről tudjuk, hogy $f(4) = 6$, illetve hogy minden x egész számra teljesül az $x \cdot f(x) = (x-3) \cdot f(x+1)$ egyenlőség. Mennyi a következő szorzat értéke: $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot ... \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

A) 2013 B) 2014 C) $2013 \cdot 2014$ D) 2013! E) 2014!

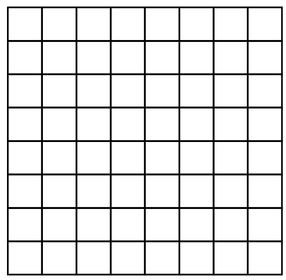
27. Bence felrajzolta a füzetébe n darab olyan, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény grafikonját, amelyek mindegyikének hozzárendelési szabályában a másodfokú tag együtthatója 1. A koordináta-rendszerben pontosan 5 olyan pont van, amelyekre ezek közül a grafikonok közül egynél több illeszkedik. Mennyi az n lehető legkisebb értéke?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

28. Hófehérke palotájának udvarában 2014 szentjánosbogár röpköd. Ha egy világító szentjánosbogár nekiütközik egy másiknak, akkor a másik (amelyiknek nekiütköztek) állapota megváltozik: ha világított előtte, akkor kialszik a fénye, ha pedig nem világított előtte, akkor elkezd világítani. Más módon a szentjánosbogarak állapota nem változik meg. Egy este Hófehérke kinézett az ablakon, és látta, hogy éppen n szentjánosbogár világít. Aztán elkezdődött a nagy lökdösődés. Az első nekiütközött a másodiknak, a második a harmadiknak, a harmadik a negyediknek, és így tovább, végül a 2013. nekiütközött a 2014.-nek. Ezután 2000 szentjánosbogár világított a palota udvarán. Mennyi az n lehető legnagyobb értéke?

A) 3 B) 7 C) 14 D) 29 E) 1006

29. Egy 8×8-os táblán (lásd ábra) megjelölünk n mezőt. Mindegyik mezőnek, akár megjelöltük, akár nem, van megjelölt szomszédja. Két mezőt szomszédnak nevezünk, ha van közös oldaluk. Mennyi az n lehető legkisebb értéke?



A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

30. Az elvarázsolt erdőben háromféle állat él: oroszlánok, farkasok és kecskék. A farkasok megeszik a kecskéket, az oroszlánok pedig a farkasokat is és a kecskéket is. Ha egy farkas megeszik egy kecskét, átváltozik oroszlánná. Ha egy oroszlán eszik meg egy kecskét, akkor farkassá változik. Ha pedig az oroszlán egy farkast eszik meg, akkor kecskévé változik. Más módon az állatok száma nem változik. Kezdetben 17 kecske, 55 farkas és 6 oroszlán élt az erdőben. Maximum hány állat lesz az erdőben akkor, amikor már semelyik kettő közül sem tudja megenni egyik a másikat?

A) 1 B) 6 C) 17 D) 23 E) 35

Összeállította: Erdős Gábor
Lektorálta: Deli Lajos
Ötletek, feladatjavaslatok: „KSF International Annual Meeting 2013" résztvevői, Edingburgh, Skócia
A verseny főszervezője: Pintér Ferenc - Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány
cím: 8800 Nagykanizsa, Zrínyi u. 18.
telefon: (93) 502903 e-mail: info@zalamat.hu honlap: www.zalamat.hu