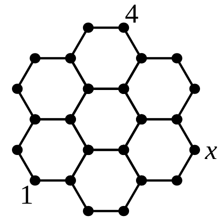
Kenguru Nemzetközi Matematika Verseny 2011
Feladatok 11-12. osztályosok részére

3 pontos feladatok

1. Az ábrán minden kis fekete körrel jelölt ponthoz egy-egy számot írunk úgy, hogy minden szakasz végpontjaiba írt két szám összege ugyanannyi legyen. Milyen számot kell írni az x helyére?



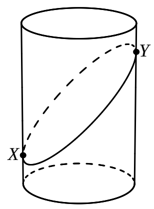
A) 1 B) 3 C) 4 D) 5
E) Ennyi információból nem lehet meghatározni.

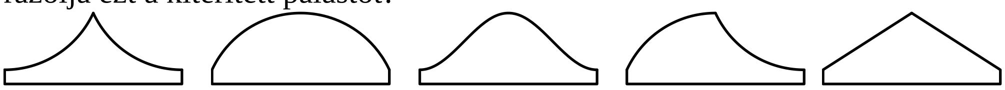
2. Egy gúla alaplapja egy 2011 oldalú szabályos sokszög. Hány éle van a gúlának?
A) 2010 B) 2011 C) 2012 D) 4022 E) 6033

3. Egy autóversenyen a rajt után Fernando vezetett, Sebastian volt a második és Mark a harmadik. A verseny során Mark és Fernando 6-szor előzték meg egymást, Fernando és Sebastian 7-szer, Mark és Sebastian pedig 8-szor. Mi lett a végső sorrend közöttük, ha egyikük sem körözte le valamelyik másikat?
A) Mark, Fernando, Sebastian B) Fernando, Sebastian, Mark
C) Sebastian, Mark, Fernando D) Sebastian, Fernando, Mark
E) Fernando, Mark, Sebastian

4. Mennyi az xy szorzat értéke, ha $2^x = 15$ és $15^y = 32$?
A) 5 B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ C) $\log_2 47$ D) 7 E) $\sqrt{47}$

5. Egy papírból készült hengerpalástot az X és Y pontokon átmenő sík mentén elvágjuk, majd a palást alsó részét kiterítjük. Az alábbiak közül melyik ábrázolja ezt a kiterített palástot?

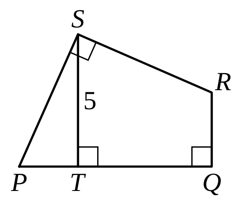




A) B) C) D) E)

6. A szabályos tetraéder olyan test, amelyet négy egybevágó szabályos háromszög határol. Egy szabályos tetraéder minden éle 1 dm. Egy bogár az egyik él felezőpontjáról szeretne eljutni a szemközti - az előzővel nem egy síkban lévő - él felezőpontjába a test felületén haladva. Legkevesebb hány dm-t kell megtennie?
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 2

7. Hány cm^2 az $PQRS$ négyszög területe, ha $ST = 5$ cm és $PS = SR$, továbbá $PSR\angle = STQ\angle = TQR\angle = 90^\circ$?



A) 20 B) 22,5 C) 25
D) 27,5 E) 30

8. Andris felírta a táblára az összes páratlan egész számot 1-től 2011-ig, majd letörölte közülük a 3-mal oszthatókat. Hány szám maradt a táblán?
A) 335 B) 336 C) 671 D) 1005 E) 1006

9. Niki úgy szeretné befejezni a 3×3-as táblázat kitöltését, hogy annak bármely 2×2-es résztáblájában a számok összege 10 legyen. Az alábbi értékek közül melyik lehet a még üresen álló helyekre írt öt szám összege, ha minden cellába egész számot kell írni?

	2	
1		3
	4	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) egyik sem

10. Amikor Andrist és Brúnót megkérdezték, hány tagja van a sakk-klubjuknak, a következő különös válaszokat adták:

Andris: A csapat tagjai 5 fő kivételével fiúk.

Brúnó: Akárhogy állítunk össze 6 fős csapatot, biztosan lesz a csapatban 4 lány.

Hány fős a sakkcsapat?

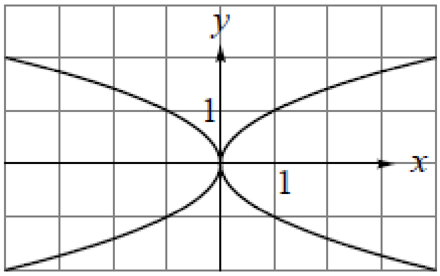
A) 6 B) 7 C) 8 D) 12 E) 18

4 pontos feladatok

11. Egy téglalapot három téglalapra darabolunk. Közülük az egyik 7×11-es, a másik 4×8-as. Mekkora a harmadik, ha az eredeti téglalap területe a lehető legnagyobb?

A) 1×11 B) 3×4 C) 3×8 D) 7×8 E) 7×11

12. Az $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2$, $f(x)=-\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{-x}$, $f(x)=-\sqrt{-x}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$ és az $f(x)=-\sqrt{|x|}$ függvények közül néhány grafikonjának egy-egy részletét ábrázoltuk az ábrán látható közös koordináta-rendszerben. Legfeljebb hánynak?

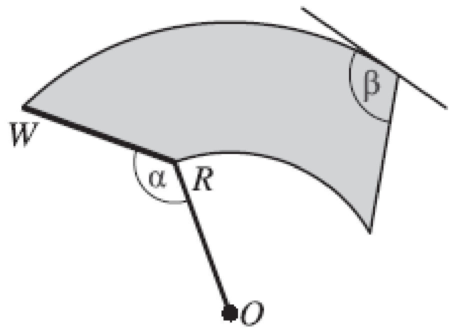


A) 0 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

13. Egy sítáborba 48 diák jelentkezett. Hatan voltak, akiknek pontosan egy édestestvérük jelentkezett a táborba, kilencen voltak, akiknek pontosan két édestestvérük jelentkezett és négyen voltak, akiknek pontosan három édestestvérük jelentkezett. A többieknek nem jelentkezett édestestvére a táborba. A sítábor előtt megbeszélésen minden jelentkező diák édesanyja ott volt. Hány anyuka volt ott a tábori megbeszélésen?

A) 19 B) 25 C) 31 D) 36 E) 48

14. Az autó szélvédőjének ablaktörlője az egyforma hosszú *WR* lapátból és *OR* karból áll, melyek α szögben vannak egymáshoz erősítve. A szerkezet az *O* pont körül forogva az ábrán jelölt területet tudja letörölni. Hány fokos a letörölt rész jobb oldali határának és a felső körív behúzott érintőjének β-val jelölt szöge?



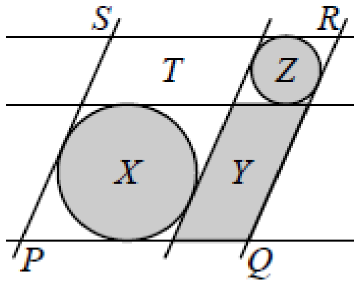
A) $\dfrac{3\pi-\alpha}{2}$ B) $\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ C) $\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$

D) $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ E) $\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

15. Egy érintőhatszög oldalai az óramutató járásával egyező irányban haladva 4, 5, 6, 7 és 8 cm hosszúak. Hány cm hosszú a hatodik oldal?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) nem lehet meghatározni

16. Az ábrán látható körök a megfelelő paralelogrammák beírt körei. Az X, Y, Z a megfelelő szürkével jelölt alakzatok területei, továbbá legyen W a $PQRS$ paralelogramma területe. Az X, Y, Z és W közül bármelyiknek az értékét elárulják nekünk egy tábla csokiért. Legalább hány tábla csokit kell fizetnünk a T-vel jelölt paralelogramma területének kiszámításához?

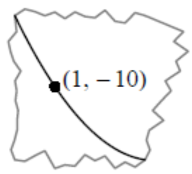


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
E) Ezekből az adatokból nem lehet meghatározni.

17. Márti és Hugó elhatározták, hogy szabályos dobókockákkal döntik el, melyikük ugorjon elsőként a tó hideg vízébe. Hugó dob egyszerre az n darab kockával, és ha egyiken sem dob 6-ost, akkor neki kell elsőként ugrania. Ha pontosan egy kockán dob 6-ost, akkor Márti ugrik elsőként, míg ha egynél több kockán szerepel a 6-os, akkor ezen a napon egyikük sem ugrik a tóba. Mennyi legyen az n értéke, hogy igazságos legyen a döntés, vagyis mindketten ugyanakkora valószínűséggel legyenek kénytelenek elsőként a hideg vízbe vetni magukat?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 9 E) 17

18. A szokásos módon felvett Descartes-féle koordináta-rendszerben ábrázoltuk az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonját, majd a tengelyeket és a grafikon többi részét kiradíroztuk. Az alábbi állítások közül melyik lehet hamis?



A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a + b + c < 0$ D) $b^2 > 4ac$ E) $c < 0$

19. Mennyi az összege azoknak a 100-nál kisebb n pozitív egész számoknak, melyekre $n^2 - 81$ osztható 100-zal?

A) 50 B) 81 C) 90 D) 100 E) 200

20. Egy tombolasorsoláshoz használt kosárban lévő golyókra pozitív egész számokat írtunk, mindegyikre különbözőt. A golyók közül 30-ra hattal osztható, 20-ra héttel osztható, 10-re pedig 42-vel osztható szám került. Legalább hány golyó van a kosárban?

A) 30 B) 40 C) 53 D) 54 E) 60

5 pontos feladatok

21. Adott két számtani sorozat, az 5, 20, 35, … kezdetű és a 35, 61, 87, … kezdetű. Hány olyan pozitív egész számokból álló számtani sorozat van, amely mindkét adott sorozat minden tagját tartalmazza? (Egy sorozatot számtani sorozatnak nevezünk, ha az egymást követő elemek különbsége állandó.)

A) 1 B) 3 C) 5 D) 26 E) végtelen sok

22. A függvények $f_1(x)$, $f_2(x)$, … sorozatáról tudjuk, hogy $f_1(x) = x$, továbbá minden pozitív egész n esetén $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$. Mennyi az $f_{2011}(2011)$ értéke?

A) 2011 B) $-\dfrac{1}{2011}$ C) $\dfrac{2010}{2011}$ D) 1 E) -2011

23. Egy dobozban piros és zöld golyók vannak. Ha behunyt szemmel kiválasztunk két golyót a dobozból, akkor 50 % valószínűséggel azok egyforma színűek lesznek. Az alábbiak közül mennyi lehet a dobozban lévő összes golyók száma?

A) 50 B) 81 C) 101 D) 512 E) 1000

24. Egy légitársaság előírta, hogy egy utas poggyásza legfeljebb hány kg-os lehet, hogy ingyen vállalják annak szállítását. Ha valakinek ennél az értéknél nehezebb a poggyásza, a többlet után tömegarányos pótdíjat számolnak fel. Kovács úrnak és feleségének a bőröndje egyaránt túllépte a megengedett értéket. A két bőrönd együtt 60 kg-ot nyomott, így a házaspárnak 3 euro pótdíjat kellett fizetnie. Szabó úr csomagja szintén 60 kg volt, ezért ő 10,5 euro pótdíjat rótt le. Legfeljebb hány kg-os lehet egy utas poggyásza, ha nem akar pótdíjat fizetni?

A) 10 B) 18 C) 20 D) 25 E) 39

25. A $\frac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}$ kifejezésben az egyforma betűk egyforma, a különböző betűk különböző számjegyet jelölnek, melyek egyike sem nulla. Mennyi a kifejezés lehető legkisebb egész értéke?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

26. Legalább hány osztója van az a, b, c pozitív egész számok szorzatának, ha $a^2=2b^3=3c^5$?

A) 30 B) 49 C) 60 D) 77 E) 1596

27. Egy 4×5-ös táblázat celláiba különböző pozitív egész számokat írunk. Az oldalszomszédos cellákba írt számok nem relatív prímek. Mennyi a táblázatban szereplő legnagyobb szám lehető legkisebb értéke?

A) 21 B) 24 C) 26 D) 27 E) 40

28. 27 egyforma kis kockából egy nagyobb kockát építünk, majd ezt a kockát a középpontjára illeszkedő, a testátlójára merőleges síkkal kettévágjuk. Hány kis kockát vágtunk két részre?

A) B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

29. Legyen $S(n)$ az n pozitív egész szám számjegyeinek összege, és $T(n)=\left|S(n+2)-S(n)\right|$. Például $T(199)=\left|S(201)-S(199)\right|=\left|3-19\right|=16$. Hány különböző, 2011-nél kisebb értéket vehet fel a $T(n)$ függvény?

A) 220 B) 221 C) 222 D) 223 E) 224

30. Adott a síkon 10 pont, melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. Mindegyik pontot mindegyik ponttal összekötjük egy fekete egyenes szakasszal. A szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet és pirosra színezzük őket. Bármelyik négy szakaszra ugyanakkora valószínűséggel esik a választás. Legyen $\frac{n}{k}$ annak a valószínűsége, hogy keletkezik egy piros háromszög, vagyis a négy szakasz közül valamelyik három egy háromszög három oldala. Mennyi az $n+k$ összeg értéke, ha n és k relatív prímek?

A) 312 B) 393 C) 447 D) 489 E) 531

Összeállította: Erdős Gábor
Lektorálta: Kiss Géza
Ötletek, feladatjavaslatok: „Kangaroo Meeting 2010” résztvevői, Tbiliszi, Grúzia
A verseny főszervezője: Pintér Ferenc - Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány
cím: 8800 Nagykanizsa, Rozgonyi u. 23.
telefon: (93) 516153 e-mail: info@zalamat.hu honlap: www.zalamat.hu