- A közölt megoldási utak a feladatoknak nem az egyetlen helyes megoldási módját adják meg, több eltérő megoldás is lehetséges.
- Az útmutatótól eltérő megoldásokat a kialakult tanári gyakorlat alapján, az útmutató pontjainak súlyozását alapul véve kell értékelni.
- Geometriai feladatok megoldásának elején a helyes ábrára jár az ott jelzett részpontszám, ha a versenyző az ábrát a szöveges leírásnak megfelelően használja.
- A feladatokat követő megjegyzések kitérnek néhány tipikus hibás megoldás pontozására.
- Minden évfolyamon 100 pont érhető el, minden iskolából a 50 ponton felüli dolgozatokat, illetve minden évfolyam három legjobbját kérjük beküldeni. Kérjük az összes olyan dolgozatok pontszámait, melyeket levélben nem küldtek el, de legalább 15 pontot elértek, a zsirp@freemail.hu címre elektronikus formában elküldeni.

11. évfolyam

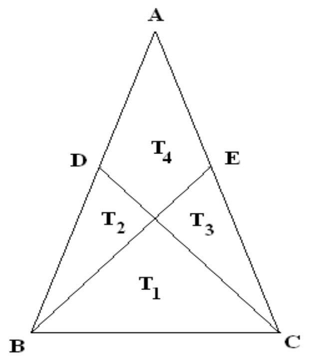
1. Egy 100 jegyű számról annyit tudunk, hogy páratlan és osztható 225-tel.
   a) Legalább hányféle különböző számjegyből áll ez a szám?
   b) Mik lehetnek a legkevesebb különböző számjegyből álló ilyen számok számjegyei?
   c) Legfeljebb hány azonos számjegyet tartalmazhat a szám?
   d) Mi lehet ez a legtöbbször előforduló számjegy?

Megoldás	**pont**
Mivel $225=3^2\cdot5^2$, emiatt a szám 25-tel és 9-cel is osztható.	**1**
Ha egy páratlan szám osztható 25-tel, akkor csak $\overline{25}$ vagy $\overline{75}$ lehet az utolsó két számjegye (tehát 100 azonos számjegy nem lehet).	**1**
a-b) A végződések miatt legalább kétféle számjegynek kell lennie a számban. Mindkét végződésnél kipróbáljuk, hogy lehet-e ez. Ha a szám végződése $\overline{25}$, akkor a 100 darab jegy mind 2-es vagy 5-ös lehetne a számban. Ez lehetetlen, mert a 2 és az 5 is 2 maradékot ad 3-mal osztva, emiatt a 100 szám maradékai együttesen $100\cdot2$-t adnak, tehát a szám nem lehet osztható 3-mal, így 9-cel sem.	**4**
Ha a szám végződése $\overline{75}$, akkor a számban levő 100 jegy mindegyike 7 vagy 5 lenne. Ha a 7-esek száma x, az 5-ösöké $100-x$, akkor $9\mid7x+5\cdot(100-x)=500+2x$. Mivel az 500 9-cel osztva 5 maradékot ad, emiatt $x=2$ esetén az összegre igaz lesz a 9-es oszthatóság. Tehát például 2 darab 7-es és 98 darab 5-ös számjegy megfelel. Válasz: legalább kétféle számjegy szerepel, és ha kétféle, akkor az 5-ös és 7-es.	**4**
c-d) Akkor lehetne 99 azonos számjegy, ha 99 darab 2-es illetve 99 darab 5-ös lenne a $\overline{25}$ végződés előtt vagy ha 99 darab 2-es illetve 99 darab 5-ös lenne a $\overline{75}$ végződés előtt. A négy eset egyikében sem kapunk 9-cel osztható számjegyösszeget.	**5**
98 darab azonos számjegy akkor lehet, ha a $\overline{25}$ vagy a $\overline{75}$ végződés előtti 98 számjegy azonos. Az első esetben a $\overline{25}$ végződés esetén $98\cdot y$ maradéka 9-cel osztva 2-t kell adjon, azaz $9-2=7$-es számjegyek kellenek, mivel 99y mindenképp osztható lenne 9-cel. Ugyanezzel a módszerrel kijön a $\overline{75}$ végződés esetén, a hogy 98 darab 3-as kell.	**5**

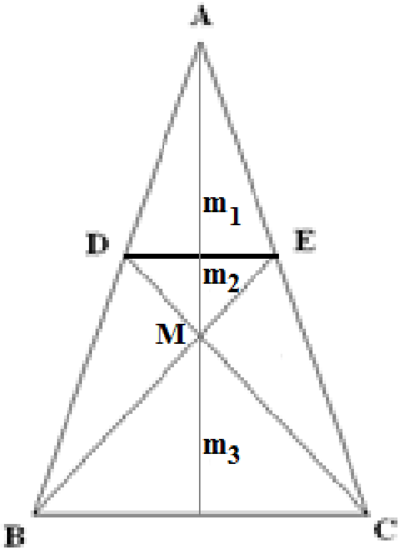
Megjegyzések:

- *Pontszámok indoklás nélküli helyes válaszok esetén: a) rész számjegyek száma: 1 pont, b) melyik számjegyek: 2 pont, c) rész: számjegyek száma: 1 pont, d) melyik számjegy: 2 pont.*
- *Ha az utolsó esetben az egyik megoldást találja meg a versenyző és itt megáll, 2 pontot veszít.*
- *Ha az a) vagy b) részben a helyes megoldás mellett hibás megoldást is megad a versenyző, a feladatrészre a pontszám felét kaphatja.*

2. Az ábrán látható ABC egyenlő szárú háromszöget a BE és CD szakaszok négy részre bontják. Ismertek a következő arányok: AE:EC=AD:DB=2:3. Fejezze ki a négy keletkezett rész területeinek arányát négy egész szám arányával!



<table>
<tr><th>Megoldás</th><th>pont</th></tr>
<tr><td>Húzzuk be a mellékelt ábra szerint a DE szakaszt! Így a T_4 területet két részre bontottuk. A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt DE párhuzamos BC-vel.
DC és EB szakaszok metszéspontja legyen M, és rajzoljuk be az ABC_Δ-nek az A-ból induló magasságát! Ezt a DE szakasz és az M pont m_1, m_2 és m_3 részekre bontja.

Jelöljük az ABC_Δ területét T-vel, az alaphoz tartozó magasságát m-mel!


</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$ABC_\Delta \sim ADE_\Delta$ és a hasonlósági arány 2:5, emiatt területük aránya egyenlő a hasonlósági arány négyzetével. Ezért $T_{ADE_\Delta} = \frac{4}{25}T$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Az előbb említett hasonlóság miatt $m_1 = \frac{2}{5}m$.
A felírt $m_1 = \frac{2}{5}m$ miatt $m_2 + m_3 = \frac{3}{5}m$ adódik.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$ABC_\Delta \sim ADE_\Delta$ miatt DE=$\frac{2}{5}BC$. A szögek egyenlősége miatt $MBC_\Delta \sim MED_\Delta$. ahol a hasonlóság aránya 2:5.
Így m_2:m_3=2:5 , azaz m_2=$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} m = \frac{6}{35} m$ és m_3=$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} m = \frac{3}{7} m$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$$T_{DEM_\Delta} = \frac{DE \cdot m_2}{2} = \frac{\frac{2}{5}BC \cdot \frac{6}{35}m}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{35} \cdot\cdot \frac{BC \cdot m}{2} = \frac{12}{175} . T$$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$$T_{BCM_\Delta} = \frac{BC \cdot m_3}{2} = \frac{BC \cdot \frac{3}{7}m}{2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{BC \cdot m}{2} = \frac{3}{7}T$$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>MEC_Δ és MDB_Δ egybevágó az ABC_Δ szimmetriája miatt. Emiatt területük kiszámítható az eddigi három területből:
$$T_{MEC_\Delta} = T_{MDB_\Delta} = \frac{1}{2}\left(T - T_{ADE_\Delta} - T_{DEM_\Delta} - T_{BCM_\Delta}\right) =$$ $$= \frac{1}{2}\left(T - \frac{4}{25}T - \frac{12}{175}.T - \frac{3}{7}T\right) = \frac{6}{35}T$$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Ebből T_1:T_2:T_3:T_4=$\frac{3}{7} : \frac{6}{35} : \frac{6}{35} : \left(\frac{4}{25} + \frac{12}{175}\right) = \frac{75}{175} : \frac{30}{175} : \frac{30}{175} : \frac{40}{175} = 15 : 6 : 6 : 8$</td><td>2</td></tr>
</table>

Megjegyzések:

- *Indoklás vagy számítás nélküli helyes válaszokra a megfelelő pontszám fele adható.*
- *Ha a versenyző csak egy konkrét háromszöggel számol, maximálisan 10 pontot kaphat.*

3. a) Igazolja, hogy a $8x^3 - 36x^2 + 54x - 32 = 0$ egész együtthatós harmadfokú egyenletnek megoldása a következő szám:

$$p = \frac{\sqrt[3]{5} + 3}{2}$$

b) Adjon meg olyan egész együtthatós negyedfokú egyenletet, melynek megoldása a következő szám:

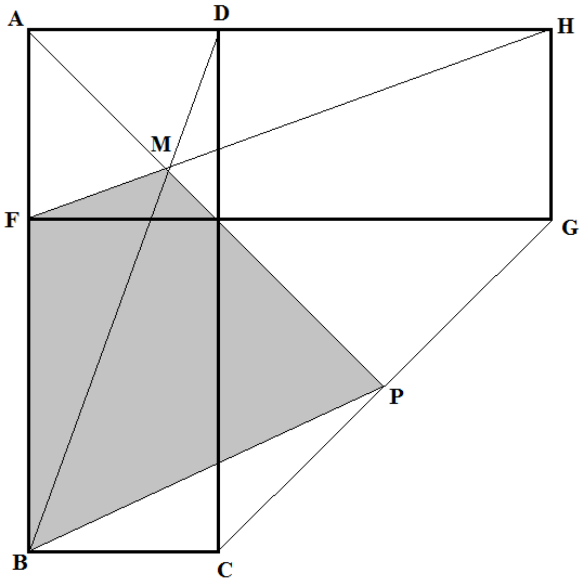
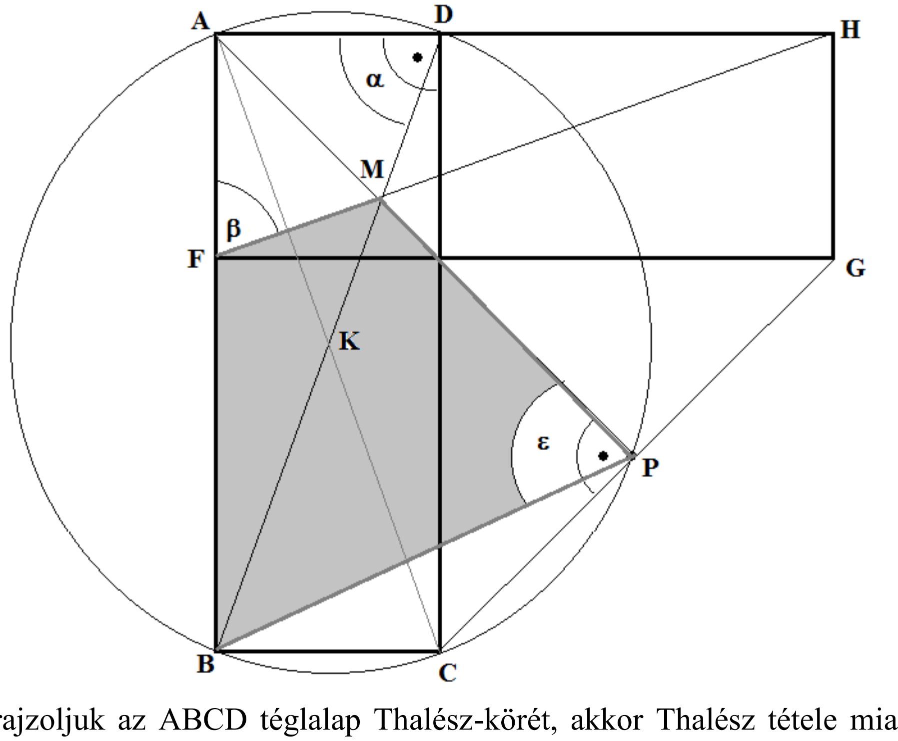
$$q = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Megoldás	**pont**
a) Alakítsuk át a definiáló egyenlőséget: $$p = \frac{\sqrt[3]{5} + 3}{2}$$ $$2p - 3 = \sqrt[3]{5}$$ $$(2p - 3)^3 = 5$$ $$8p^3 - 36p^2 + 54p - 27 = 5$$ $$8p^3 - 36p^2 + 54p - 32 = 0$$ Tehát a megadott p érték gyöke a fenti egyenletnek.	**7**
b) A megadott q szám négyzete: $$q^2 = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$	**3**
Ha ezt a számot 2-vel bővítjük, majd beviszünk a gyök alá, akkor ezt kapjuk: $$q^2 = \frac{10 + 4\sqrt{6}}{2} = \frac{10 + \sqrt{96}}{2}$$ Ez lehet egy $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet megoldóképletének eredményeként kapott egyik gyök, ha a képletben levő b együttható értéke –10 és a értéke 1. Számítsuk ki a c értékét! $(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 96$, ebből c=1. Tehát q^2 megoldása a következő egyenletnek: $$x^2 - 10x + 1 = 0$$	**8**
Így q megoldása a következő egyenletnek: $$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$	**2**

Megjegyzések:

- *A b) rész helyes egyenletének megadása indoklás nélkül 5 pontot ér.*
- *Mindkét részre lehet más okoskodással is megoldást találni. Az a) részt behelyettesítéssel, a b) rész egyenletét a Viéte-formulákkal és a $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ második gyök bevonásával.*
- *A b) részre maximális pont jár, ha a versenyző felírja a helyes egyenletet és igazolja, hogy q szám gyöke annak.*

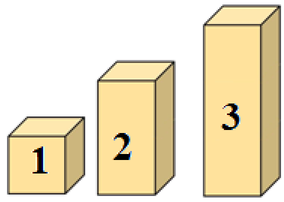
4. Az ABCD és AFGH egybevágó téglalapok úgy helyezkednek el, hogy D illeszkedik AH szakaszra, F pedig illeszkedik AB szakaszra. Legyen FH és DB metszéspontja M, CG felezőpontja pedig P pont. Igazolja, hogy FMPB négyszög húrnégyszög!

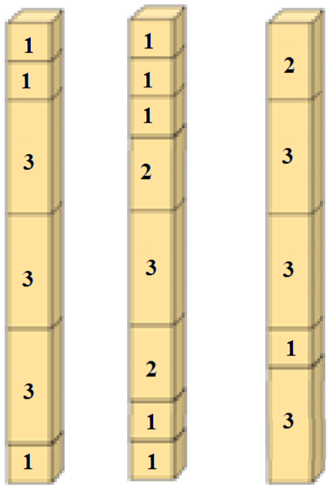
Megoldás	**pont**
Egy helyes ábra: 	**3**
Mivel a két téglalap szimmetrikus az A-nál levő derékszög szögfelezőjére, ezért M és P pont is rajta van ezen a szögfelezőn.	**2**
CG merőleges az AP tükörtengelyre, emiatt APC∠=90°.	**2**
 Ha megrajzoljuk az ABCD téglalap Thalész-körét, akkor Thalész tétele miatt ezen rajta kell lennie a P pontnak is, mivel APC∠=90°.	**5**
E körben BPA∠ és BDA∠ azonos íven nyugvó kerületi szögek, emiatt az ábra jelöléseivel $\varepsilon=\alpha$.	**4**
A tükrözés miatt $\alpha=\beta$, azaz $\beta=\varepsilon$ is igaz.	**2**
Az FMPB négyszög F-nél és P-nél levő szögeinek összege 180°, emiatt húrnégyszög.	**2**

Megjegyzések:

- *FMPB négyszög általában nem trapéz, nem derékszögű, nincs állandó szöge (ez ABCD téglalap oldalarányának változtatásával könnyen látható). Ha a versenyző ilyen specialitásra támaszkodik, nem kap pontot a megoldására.*
- *Koordináta-geometriai úton is adható helyes megoldás.*

5. A kis Laci építőjátékában háromféle elem van. Az egyik kocka alakú, éle 1 cm, a másiknak 1, 1 és 2 cm-esek, a harmadiknak pedig 1, 1 és 3 cm-esek az egy csúcsból induló élei. (Jobb oldali ábra) Laci ilyen elemekből szeretne építeni egy téglatest alakú tornyot, melynek a földön levő alaplapja egy 1 cm oldalú négyzet, magassága pedig 12 cm. Háromféleképpen már megépítette a tornyot (bal oldali ábra) .





a) Hányféle lehetősége van a torony építésére, ha mindhárom féle elemből ugyanannyit (2-2-2 darabot) használ fel?

b) Hányféle lehetősége van, ha semmilyen megkötést nem ad az elemek számára és méretére?

<table>
<tr><td>Megoldás</td><td>pont</td></tr>
<tr><td>a) Ha az azonos elemeket is megkülönböztetnénk, akkor 6!=720 –féle lehetőség lenne.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Ha a két 1-est nem különböztetjük meg, az esetek számát el kell osztani 2-vel.
Ha a két 2-est nem különböztetjük meg, az esetek számát el kell osztani 2-vel.
Ha a két 3-ast nem különböztetjük meg, az esetek számát el kell osztani 2-vel.
Emiatt a lehetőségek száma $\frac{720}{2\cdot2\cdot2}=90$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>b) Jelölje az x cm magasságú torony lehetséges felépítésének számát f(x).
Ekkor f(1)=1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>f(2)=2 mert egyetlen 2-es vagy 2 db 1-es elem lehetséges.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>f(3)=4, mert lehet egy 3-as, lehet 1+2 vagy 2+1 vagy 1+1+1.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ha x magasságú tornyot építünk, akkor három eset lehet:
a legfelső elem lehet 1-es – ez f(x–1) –féle lehetőség.
a legfelső elem lehet 2-es – ez f(x–2) –féle lehetőség.
a legfelső elem lehet 3-as – ez f(x–3) –féle lehetőség.
Emiatt f(x)= f(x–1)+ f(x–2)+ f(x–3)</td><td>7</td></tr>
<tr><td>f(x) mindegyik értékét kiszámolhatjuk az előző három érték összeadásával az f(1), f(2), f(3) értékétől indulva:<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>13</td><td>24</td><td>44</td><td>81</td><td>149</td><td>274</td><td>504</td><td>927</td></tr></table>Tehát 927-féleképp lehet a tornyot felépíteni.</td><td>4</td></tr>
</table>

Megjegyzés:

- *Indoklás nélküli helyes végeredményért 2 pont jár az a) részben, 5 pont jár a b) részben.*
- *Mindkét esetet ismétléses permutációk képletével vagy kombinációkkal is meg lehet oldani, ezek is maximális pontot érő megoldások, ha a megfelelő elméleti részre megfelelően hivatkozik a versenyző.*