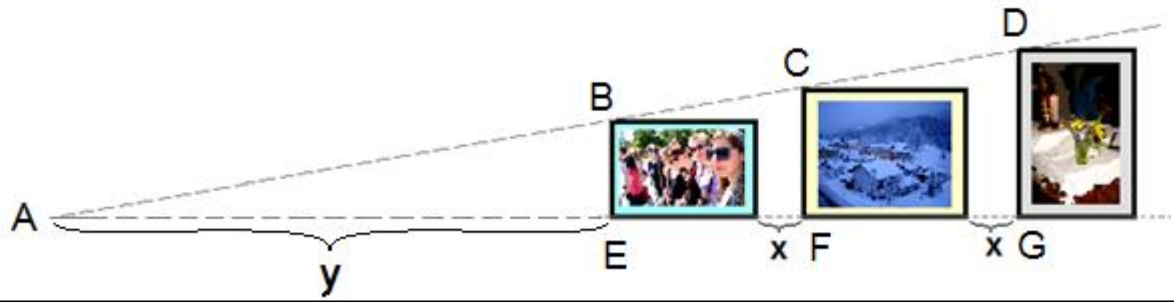
- A közölt megoldási utak a feladatoknak nem az egyetlen helyes megoldási módját adják meg, több eltérő megoldás is lehetséges.
- Az útmutatótól eltérő megoldásokat a kialakult tanári gyakorlat alapján, az útmutató pontjainak súlyozását alapul véve kell értékelni.
- Geometriai feladatok megoldásának elején a helyes ábrára jár az ott jelzett részpontszám, ha a versenyző az ábrát a szöveges leírásnak megfelelően használja.
- A feladatokat követő megjegyzések kitérnek néhány tipikus hibás megoldás pontozására.
- Minden évfolyamon 100 pont érhető el, minden iskolából a 40 ponton felüli dolgozatokat, illetve minden évfolyam három legjobbját kérjük beküldeni. Kérjük az összes olyan dolgozatok pontszámait, melyeket levélben nem küldtek el, de legalább 10 pontot elértek, a zsirp@freemail.hu címre elektronikus formában elküldeni.

11. évfolyam

1. Lajos az új lakásában három képet szeretne felrögzíteni az egyik üres falra. A képek méretei: 35x25, 51x40, 38x60 cm. (Az első adat a kép szélességét, a második a magasságát jelzi.) Lajos szeretné, ha a képek alja egy vonalban lenne, a képek bal felső sarkai is egy egyenesre esnének, illetve ha két-két szomszédos kép távolsága is egyenlő lenne (az ábra szerint). Számítsa ki, hány cm távolságra helyezze el egymástól a szomszédos képeket?



Megoldás	**pont**
Hosszabbítsuk meg a képek bal felső sarkait tartalmazó egyenest a képek alsó sarkainak egyeneséig! Legyen ez a metszéspont A, a képek bal felső sarkai B, C és D pontok, a jobb alsó sarkok pedig E, F, G pontok. Legyen a képek közti távolság *x* és AE=*y*.	**2**
$ABE_\Delta \sim AFC_\Delta \sim AGC_\Delta$	**2**
A hasonlósági arányokat felírva: $$\frac{y}{25}=\frac{y+35+x}{40}=\frac{y+35+x+51+x}{60}$$	**8**
Ha mindhárom kifejezést szorozzuk 600-zal, majd kettébontjuk, ezt az egyenletrendszert kapjuk: $$24y=15y+15x+525$$ $$24y=10y+20x+860$$	**2**
Ebből *y*=80 és *x*=13	**5**
Tehát egymástól 13 cm-re kell a képeket elhelyezni.	**1**

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli vagy méréssel adott válaszok esetén nem jár pont.*

2. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$$2-\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x-3}=0$$

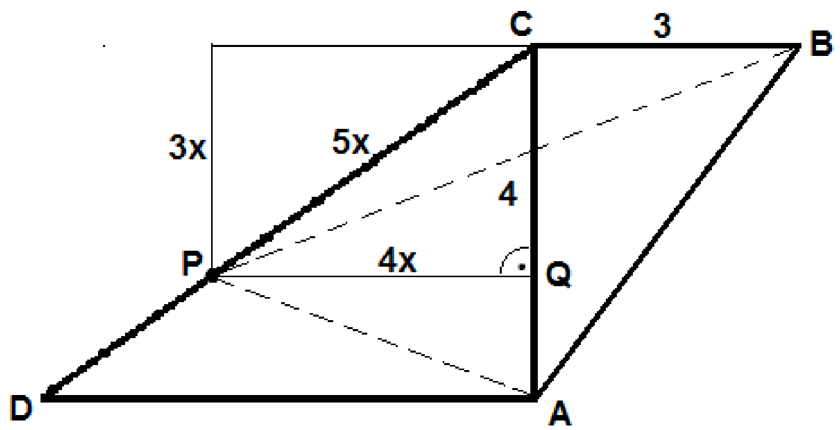
Megoldás	**pont**
Rendezzük az egyenletet: $$\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+5}=-2$$	**2**
Mindkét oldalt köbre emeljük: $$x-3-3\cdot\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x+5}+3\cdot\sqrt[3]{x-3}\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2-x-5=-8$$	**4**

Rendezés, majd kiemelés: $$-3\cdot\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x+5}+3\cdot\sqrt[3]{x-3}\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2=0$$ $$-3\cdot\sqrt[3]{x-3}\cdot\sqrt[3]{x+5}\cdot\left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+5}\right)=0$$	**5**
Egy szorzat akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, emiatt:	**2**
$\sqrt[3]{x-3}=0$, azaz x=3 vagy $\sqrt[3]{x+5}=0$, azaz x=–5	**4**
vagy $\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+5}$=0 , ahonnan átrendezéssel és köbre emeléssel –3= –5 ellentmondásos egyenlet keletkezik, tehát innen nincs megoldás.	**3**

Megjegyzések:

- *Indoklás nélkül a két megoldás 2-2 pontot ér.*
- *Ha a versenyző minden vizsgálat nélkül leoszt a* $\left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+5}\right)$ *kifejezéssel, az utolsó három pontot és a nulla szorzat alkalmazására adható két pontot veszíti el – összesen ötöt.*
- *A nulla szorzat alkalmazására adható két pont akkor is jár, ha a folytatásból derül ki, hogy a versenyző így gondolkozott.*

3. Egy ABCD trapéz nem paralelogramma, BC alapja 3 dm hosszú. A trapéz 4 dm hosszú AC átlója merőleges az alapokra és két hasonló háromszögre bontja a trapézt.
Igazoljuk, hogy a CD szár minden P pontjára teljesül az alábbi egyenlőség!
$$PA^2+PB^2=25+2\cdot PC^2$$



Megoldás	**pont**
A mellékelt ábra szerint $ABC_\Delta \sim DCA_\Delta$. Itt ACD szög CAB szöggel egyenlő, mert ha CBA szöggel lenne egyenlő, akkor ABCD paralelogramma lenne.	**5**
Legyen P-nek az AC átlóra eső merőleges vetülete Q. Mivel $PCQ_\Delta \sim DCA_\Delta \sim ABC_\Delta$, emiatt PQ : QC = 4 : 3, ezért jelölhetjük PQ szakaszt 4x-szel és QC szakaszt 3x-szel.	**3**
A Pitagorasz-tétel miatt PC=5x.	**2**
Írjunk fel Pitagorasz-tételt a PA és PB szakaszokat átfogóként tartalmazó két derékszögű háromszögre! $$PA^2=(4x)^2+(4-3x)^2$$ $$PB^2=(3x)^2+(3+4x)^2$$	**4**

Helyettesítsünk be ezek szerint az igazolandó egyenlőség bal oldalába! $PA^2 + PB^2 = (4x)^2 + (4 - 3x)^2 + (3x)^2 + (3 + 4x)^2 =$ $= 25 + 50x^2 = 25 + 2 \cdot PC^2$ Éppen a kérdéses egyenlőség jobb oldalát kaptuk.	**6**

Megjegyzések:

- *Az első 5 pont a helyes ábráért jár, melyről (akár később) kiderül, hogy a megfelelő módon hasonló az ABC és a BCA háromszög.*
- *Koordináta-geometriai úton is adható helyes megoldás.*

4. Béla, amikor autójával hétvégén vidékre megy nagynénjéhez, az út egy szakaszát autópályán szokta megtenni.
Egy alkalommal útjavítás miatt le volt zárva az autópálya egy része, egy 8 km-rel hosszabb elterelő úton kellett mennie. Emiatt átlagsebessége a teljes úton 15 km/h-val volt kevesebb és menetideje is 12 perccel hosszabb volt a szokásosnál.
Egy újabb alkalommal a kerülő utat is lezárták útjavítás miatt, így Bélának az út egy szakaszát igen rossz minőségű földúton kellett megtennie, a megtett teljes útja még az elterelő útnál is 7 km-rel hosszabb volt. Ez alkalommal az egész útra számított átlagsebessége további 10 km/h-val csökkent, a menetideje pedig még 12 perccel több lett.
Számítsa ki, hány perc alatt szokott odaérni nagynénjéhez az útjavítások előtti időszakban!

Megoldás	**pont**
Jelölje *x* (km/h) Béla szokásos átlagsebességét, *y* (h) pedig a szokásos menetidejét. Ekkor *xy* a megtett útja.	**3**
Az első útjavítás esetén átlagsebessége *x*–15 (km/h), a menetideje *y*+0,2 (h) , a megtett útja pedig *xy*+8 volt	**3**
A második útjavítás idején átlagsebessége *x*–25 (km/h), a menetideje *y*+0,4 (h) , a megtett útja pedig *xy*+15 volt	**3**
Az *s*=*vt* egyenleteket felírva: $(x - 15)(y + 0{,}2) = xy + 8$ $(x - 25)(y + 0{,}4) = xy + 15$	**3**
xy kiesik mindkét egyenletből, ha rendezzük őket: $0{,}2x - 15y = 11$ $0{,}4x - 25y = 25$	**3**
Ebből *y*=0,6 és *x*=100	**4**
Tehát 0,6 óra=36 perc alatt szokott odaérni.	**1**

Megjegyzés:

- *Indoklás nélküli helyes végeredményért 5 pont jár.*

5. Adott a következő három másodfokú egyenlet, amelyekben a és c nem egyenlő, és egyikük sem nulla:

$$I.\ \ ax^2 + bx + c = 0$$
$$II.\ \ cx^2 + bx + a = 0$$
$$III.\ \ bx^2 + cx + 8a = 0$$

a) Adja meg az I. és II. egyenlet lehetséges közös gyökeit!
b) Adja meg az I. és III. egyenlet lehetséges közös gyökeit!

Megoldás	**pont**
a) Ha egy x szám gyöke az I és II. egyenletnek is, akkor gyöke az egyenletek különbségének is: $$ax^2-cx^2+c-a=0$$ $$(a-c)x^2-(a-c)=0$$	**3**
Mivel $a \neq c$, ezért oszthatunk mindkét oldalon $(a–c)$ –vel: $x^2–1 = 0$, amiből x=1 vagy x=–1.	**4**
Behelyettesítéssel látható, hogy mindkettőre teljesül, hogy ha gyöke I-nek, akkor II-nek is – és fordítva.	**2**
b) Az x szám gyöke marad az egyenletnek akkor is, ha mindkét oldalt x-szel megszorozzuk: $$ax^3+bx^2+cx=0$$ A kapott egyenletből vonjuk ki a III. egyenletet: $$ax^3-8a=0$$	**6**
Leoszthatunk a-val, mert nem 0, így $x^3–8=0$ $x=2$	**3**
Behelyettesítéssel látható, hogy ha $x=2$ gyöke I-nek, akkor III-nak is – és fordítva.	**2**

Megjegyzés:

- *Indoklás nélküli helyes végeredményért az a) és b) részre is 2 pont jár.*