MEGOLDÓKULCS

1. FELADAT

Egy tíz lakásos társasház elkészültekor kiderül, hogy csak hét lakás hibamentes, bár a többi is beköltözhető. Az első napon csak öt lakásba költöznek be a lakók.
Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan három hibátlan lakásba és két hibásba költöznek be?

MEGOLDÁS:

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt. $P(A)=\frac{k}{n}$, ahol k az összes kedvező elemi esemény, n pedig az összes elemi esemény számát jelöli. Az összes lehetőség számát úgy kapjuk meg, hogy a 10 lakásnak megfelelő 10 elemből képezhető ötöd osztályú kombinációk számát vesszük: $n=\binom{10}{5}$. *2 pont*

A kedvező eseteket tekintve a 7 hibátlan lakásból kell 3-at választanunk, a 3 hibásból pedig 2-őt, illetve ezek minden csoportosítását.

Így a kedvező esetek száma: $k=\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{2}$ *2 pont*

$$\text{Tehát } P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}}=\frac{\frac{7!}{3!\cdot4!}\cdot\frac{3!}{2!}}{\frac{10!}{5!\cdot5!}}=\frac{7!\cdot5!\cdot5!}{4!\cdot2!\cdot10!}=\frac{5}{12}.$$

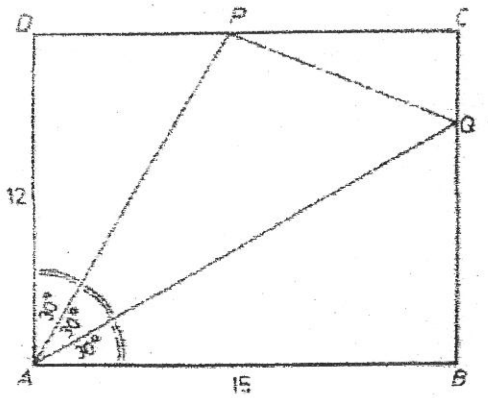
A keresett valószínűség tehát $\frac{5}{12}$. *2pont*

6 pont

2. FELADAT

Az ABCD téglalap oldalai AB=15, AD=12 hosszúak. A téglalap A csúcsánál lévő derékszög szögharmadolói BC oldalt Q-ban, CD oldalt P-ben metszik.
Milyen hosszú a PQ szakasz?

MEGOLDÁS:



A szögharmadolók a derékszöget 30°-os szögekre bontják. *1 pont*

Az APD háromszögben $\cos 30^\circ=\frac{12}{AP}$, azaz $AP=\frac{24}{\sqrt{3}}$. *1 pont*

Hasonlóképpen az ABQ háromszögben $\cos 30^\circ=\frac{15}{AQ}$, azaz $AQ=\frac{30}{\sqrt{3}}$. *1 pont*

Az APQ háromszögre fölírva a koszinusztételt: *2 pont*

$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos 30^\circ,$

$PQ^2 = \frac{24^2}{3} + \frac{30^2}{3} - \frac{2 \cdot 24 \cdot 30}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$

$PQ^2 = \frac{576 + 900 - 720\sqrt{3}}{3} \approx 76{,}3,$ *2 pont*

$PQ \approx 8{,}73.$

7 pont

3. FELADAT

Egy számtani sorozat első eleme 11, az első tíz elem összege pedig négyszerese az ezek közül páros sorszámú elemek összegének.
Írja fel a sorozat első tíz elemét!

MEGOLDÁS:

Ha a sorozat első eleme $a_1 = 11$ és d-vel jelöljük a sorozat differenciáját, akkor

$a_2 = 11 + d$

$a_{10} = 11 + 9d$ *2 pont*

Tehát az első 10 elem összege: $S_{10} = \frac{11 + 11 + 9d}{2} \cdot 10$ *1 pont*

Ezek közül a páros sorszámú elemek szintén egy számtani sorozat egymást követő 5 eleme, ezek összege $S_5^\alpha = \frac{11 + d + 11 + 9d}{2} \cdot 5$. *2 pont*

A feladat szerint $S_{10} = 4 \cdot S_5^\alpha$, azaz $110 + 45d = 4 \cdot (11 + 5d) \cdot 5$. *2 pont*

Rendezés után kapjuk, hogy $d = -2$. *1 pont*

A sorozat első 10 eleme tehát: 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7. *1 pont*

Ezek valóban kielégítik a feladat feltételeit, mert összegük 20; a páros sorszámúaké pedig 5. *1 pont*

10 pont

4. FELADAT

Mely valós x-ekre negatív a $\cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2$ kifejezés értéke?

MEGOLDÁS:

Meg kell oldani a $\cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2 < 0$ egyenlőtlenséget,

azaz $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 < 0$. *1 pont*

Szorzattá alakítás után kapjuk, hogy $(2cox - 1)(\cos x - 1) < 0$. *2 pont*

Mivel $\cos x - 1 > 0$ nem lehet, ezért a fenti egyenlőtlenség csak úgy teljesülhet, hogy *1 pont*

$2\cos x - 1 > 0$
és
$\cos x - 1 < 0$ *1 pont*

vagyis

$\cos x > \frac{1}{2}$ és
$\cos x < 1$ *1 pont*

$\cos x > \frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha $x \in \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[\quad (k \in Z)$ *1 pont* további

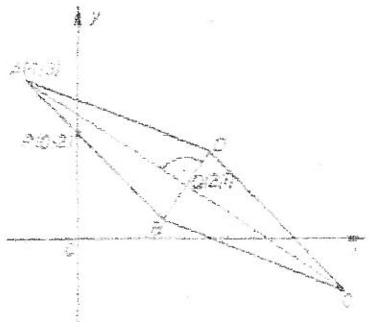
$\cos x < 1$ megoldása $x \neq 2l\pi$ $\quad (l \in Z)$ *1 pont*

Tehát a megoldás: $\left]-\frac{\pi}{3}+2k\pi;2k\pi\right[\cup \left]2n\pi;\frac{\pi}{3}+2n\pi\right[\quad (k;n \in Z)$ *1 pont*

9 pont

5. FELADAT
Az ABCD rombusz A csúcsának koordinátái (-1;3), az átlók metszéspontja Q(2;1).
A P(0;2) pont az A csúcsból induló egyik oldalon van.
Számítsa ki a rombusz területét!

MEGOLDÁS
Készítsünk ábrát: *1 pont*



A rombuszt átlói négy egyenlő területű derékszögű háromszögre bontják, ezért a rombusz területét a $T = 2 \cdot AQ \cdot BQ$ összefüggéssel számolhatjuk. *1 pont*

Nyilván $\mathbf{AQ}(3;-2)$ *1 pont*

Tehát $AQ = \sqrt{13}$ *1 pont*

<u>B koordinátáinak meghatározása</u>:
Ha f-fel jelöljük BD egyenesét, e-vel pedig AB egyenesét, akkor
$B = e \cap f$ és $\mathbf{n}_f = \mathbf{AQ}(3;-2)$ -t felhasználva *1 pont*

az f egyenes egyenlete: $3x - 2y = 4 \quad (1)$ *1 pont*

Továbbá
$\mathbf{v}_e = \mathbf{AP}(1;-1)$ alapján $\mathbf{n}_e(1;1)$. Ezzel *2 pont*

az e egyenes egyenlete: $x + y = 2 \quad (2)$ *1 pont*

B koordinátáit az (1)-(2) egyenletrendszer gyökei adják: *1 pont*

$3x - 2y = 4$
$x + y = 2$

Rendezés után kapjuk, hogy $B\left(\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$. *1 pont*

$\mathbf{BQ}\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$-t felhasználva: *1 pont*

$BQ = |\mathbf{BQ}| = \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{13}}{5}$ *1 pont*

A rombusz területe tehát: $T = 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{13}}{5} = \frac{26}{5} = 5{,}2$ területegység. *1 pont*

14 pont

6. FELADAT

Legyenek a és b egytől különböző pozitív valós számok, és legyen $\log_a b > 0$.

Bizonyítsa be, hogy ekkor $4\log_a^2 b + 16\log_b^2 a + 19 > 4\sqrt{3}\log_a b + 8\sqrt{3}\log_b a$!

MEGOLDÁS:

Az egyenlőtlenség bal oldalát tekintve

$4\log_a^2 b + 16\log_b^2 a + 19 = (2\log_a b + 4\log_b a)^2 - 16 + 19$, *2 pont*

felhasználva, hogy $\log_a b \cdot \log_b a = 1$. *1 pont*

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség

$(2\log_a b + 4\log_b a)^2 + 3 > 2\sqrt{3}(2\log_a b + 4\log_b a)$ *1 pont*

Mivel $\log_a b > 0$, ezért $\log_a b > 0$ is teljesül, *1 pont*

írhatjuk, hogy $\dfrac{(2\log_a b + 4\log_b a)^2 + 3}{2\log_a b + 4\log_b a} > 2\sqrt{3}$ *1 pont*

innen $2\log_a b + 4\log_b a + \dfrac{3}{2\log_a b + 4\log_b a} > 2\sqrt{3}$ *1 pont*

$\sqrt{3}$ -mal osztva mindkét oldalt:

$\dfrac{2\log_a b + 4\log_b a}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\log_a b + 4\log_b a} > 2$ *1 pont*

Ismeretes, hogy bármely pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, és pontosan akkor 2, ha a kérdéses szám 1. *1 pont*

Tehát már csak azt kell belátnunk, hogy

$\dfrac{\sqrt{3}}{2\log_a b + 4\log_b a} \neq 1$ *1 pont*

Ellenkező esetben ugyanis $2\log_a b + \dfrac{4}{\log_a b} = \sqrt{3}$ *1 pont*

Azaz $2\log_a^2 b - \sqrt{3}\log_a b + 4 = 0$ lenne *1 pont*

Ennek D diszkriminánsára viszont D=3-32<0 *1 pont*

Tehát az egyenlőtlenség semmilyen valós számra sem teljesülhet, ezzel az eredeti egyenlőtlenség igaz voltát beláttuk. *1 pont*

14 pont