Bolyai János Matematika Verseny feladatai

12. évfolyam

1998.október 29.

1. Egy háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak. Milyen értéke lehet a sorozat hányadosának? 13 pont

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$\sqrt{x^2-1} * \sin 2\pi x = \sqrt{\frac{x^2-1}{4}}$ 13 pont

3. Egy derékszögű háromszög területe 1. A háromszögbe írható kör területe $\frac{\pi}{9}$ .Számítsuk ki a háromszög oldalait és szögeit! 14 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n egész szám, akkor $\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}$ szintén egész szám! 10 pont

5. Egy téglalap oldalai 37 és 23 egység hosszúak. Mindegyik csúcsánál levágunk belőle egy-egy, egymással egybevágó háromszöget úgy, hogy a megmaradó egyenlő oldalú nyolcszög szimmetrikus legyen a téglalap szimmetriatengelyeire. Mekkora a nyolcszög oldala, területe? Mekkorák a szögei? 10 pont

12.évfolyam megoldások
1998-99-es tanév

1. A háromszög oldalainak hossza pozitív szám.
Jelölje a, aq, aq^2 a háromszög oldalait. 0<a,0<q

a, Ha q=1 egység, akkor a háromszög szabályos, oldalai egyenlő hosszúak. 2 pont

Ha a háromszög nem a szabályos, akkor oldalai nem egyenlők egymással. $q \neq 1$.

b, a legnagyobb oldal hossza a , akkor q <1 egység . $aq^2 < aq < a$.

Háromszög egyenlőtlenség $aq^2 + aq > a$

$q^2 + q > 1$. $q^2 + q - 1 > 0$.

$q < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ illetve $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q$ Mivel 1 >q ,ezért $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1$. 5 pont

c, Ha a legkisebb oldal hossza a , akkor q >1 egység. $a < aq < aq^2$.

Háromszög egyenlőtlenség $aq^2 < aq + a$.

$q^2 < q+1$. $q^2 - q - 1 < 0$.

$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ Mivel 1 <q , ezért $1 < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 5 pont

A három esetet összegezve a sorozat hányadosa $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ lehet. 1 pont

2. A négyzetgyökös kifejezés értelmezési tartománya $x \leq -1$ és $1 \leq x$ 1 pont

$\sqrt{x^2-1} * \sin 2\pi x = \sqrt{\frac{x^2-1}{4}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$ 1 pont

Rendezés és kiemelés után $\sqrt{x^2-1} * (\sin 2\pi x - \frac{1}{2}) = 0$.

A szorzat 0, ha valamelyik tényezője 0.

vagy $\sqrt{x^2-1} = 0$. Azaz $x_1=-1$ vagy $x_2= 1$. 2 pont

vagy $(\sin 2\pi x - \frac{1}{2}) = 0$ azaz $x_3 = \frac{1}{12} + k$, $x_4 = \frac{5}{12} + k$ 5 pont

$k \neq 0$ $k \neq 1$ k egész szám. 2 pont

3. Jelöljük a háromszög befogóit a-val és b-vel, az átfogót c-vel ,
a beírt kör sugarát r-rel. $t_{kör} = r^2\pi = \frac{\pi}{9}$. Azaz a kör sugara $r = \frac{1}{3}$ 2 pont

$t = \frac{ab}{2} = 1, \Rightarrow$ ab=2 1 pont

$t = \frac{.(a+b+c)r}{2} = 1, \Rightarrow$ $(a+b+c)\frac{1}{3} = 2, \Rightarrow$ $a+b=6-c$ 3 pont

Pithagorász tétel $a^2 + b^2 = c^2$

$(6-c)^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4$ 3 pont

Négyzetre emelés, rendezés után $c = \frac{8}{3}$ 2 pont

$a + b = \frac{10}{3}$ és $ab = 2$ egyenletrendszer megoldása $a_1 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ $a_2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$

$b_1 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ $b_2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ 2 pont

Ellenőrizve a kapott értékek megoldásai a feladatnak. 1 pont

4. $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 2 pont

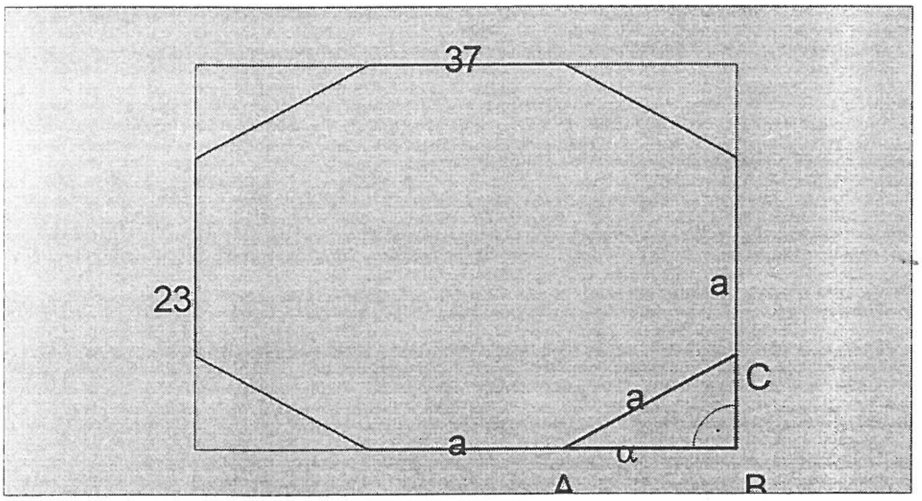
2n+1=[n-1 + n+2] felhasználásával 3 pont

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)[n-1+n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)+n(n+1)(n+2)}{6}$ 3 pont

A kapott kifejezés számlálójában lévő mindkét szorzat három egymást követő egész szám szorzata, amely mindig osztható kettővel és hárommal is ,tehát ezek szorzatával 6-al is. Két hattal osztható szám összege is osztható hattal azaz kifejezés egész

2 pont

5. A téglalap egyik sarkából levágott ABC derékszögű háromszögre felírt Pithagorasz –tétel szerint:



Helyes ábra 2 pont

$\left(\frac{23-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{37-a}{2}\right)^2 = a^2$ 2 pont

Ebből azonos átalakítások után a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$a^2 + 60a - 949 = 0$ 2 pont

$a_1 = 13$ $a_2 \neq -73$ Tehát a nyolcszög oldalai 13cm hosszúak.

$T_{nysz} = T_{\square} - 4T_{\triangle} = 851 cm^2 - 240 cm^2 = 611 cm^2$ 2 pont

2AB=37-13=24 AB=12 ABC derékszögű háromszögből szögfüggvénnyel kiszámítható α szög 67°23'. A nyolcszög A-nál fekvő szöge 112°37'

A nyolcszög C-nál fekvő szöge 157°23' 2 pont