8 F

BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKAVERSENY feladatai , 1995/96. tanév
szakközépiskolák és gimnáziumok 4. osztálya számára

A függvénytáblázaton kívül más könyv nem használható , kalkulátor használható ,
számítógép nem használható !
A feladatok megoldását kellően indokolni szükséges !
Ügyeljünk az áttekinthető külalakra !
a verseny időtartama 2 óra 30 perc

1./ Határozd meg azt a mértani sorozatot , amelyben az első és negyedik tag összege 27 , a második és harmadik tag szorzata 72 !

6 pont

2./ Az ABC derékszögű háromszög derékszögű csúcsa a C pontban van . Az A pontból induló f szögfelező talppontja a BC befogón az E pont .
Számítsd ki a háromszög szögeit , ha $f = 3\overline{BE}$!

6 pont

3./ Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(2^x ; 4^x)$; $B(4^x ; 2^x)$; $C(4^x ; 4^x)$.
Területe 72 . Határozd meg a háromszög beírható körének a sugarát !

8 pont

4./ Oldjad meg az egész számok halmazán a $\sin\left[\frac{\Pi}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 12}\right)\right] = 0$ egyenletet !

8 pont

5./ Téglatest alakú dobozt akarunk készíteni , melynek alapterülete 1 dm^2 . Az összes éleinek az együttes hossza 20 dm . Hogyan kell a méreteket megválasztani , hogy a felszín a lehető legnagyobb legyen, és mekkora ez a felszín ?

10 pont

Szombathely, 1995. november 7.

8 M

BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKAVERSENY feladatainak megoldása 1995/96. tanév
A szakközépiskolák és a gimnáziumok 4. osztálya számára

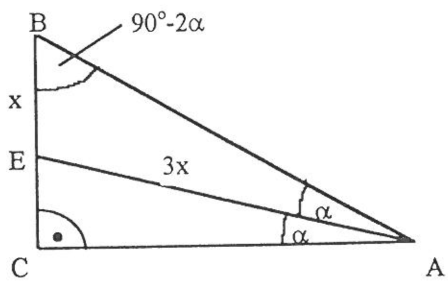
1., $\left.\begin{array}{r} a_1 + a_1 q^3 = 27 \\ a_1^2 q^3 = 72 \end{array}\right\} \Rightarrow q^3 = \dfrac{72}{a_1^2}$ 3 p

$a_1 + \dfrac{72}{a_1} = 27$ innen $a_1^2 - 27a_1 + 72 = 0$ $\quad a_{1_1}=24 \quad q_1 = \dfrac{1}{2}$, $\quad a_{1_2} = 3 \quad q_2=2$ 2 p

Mindkét sorozat kielégíti a feltételeket . 1 p

összesen 6 pont

2./



ABE Δ -ben a szinusztételt felírva :

$$\frac{\sin\left(90^{\circ} - 2\alpha\right)}{\sin\alpha} = 3$$ 3 p

Ebből $2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha - 1 = 0$ $\quad \alpha < 45^{\circ}$

$\sin\alpha_1 = 0{,}2807 \quad \alpha_1 = 16{,}3^{\circ}$ 2 p

$\sin\alpha_2 < 0$

Tehát a háromszög szögei 32,6° ; 57,4° ; 90° 1 p

Összesen 6 pont

3./ A háromszög derékszögű és egyenlő szárú ! 2 p

Legyen b a befogó !
$b^2 = 144$, ebből b = 12 1 p

$4^x - 2^x = 12$ tehát $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$

Megoldva a másodfokú egyenletet $\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^x = -3 \end{array}$ lehet , amiből x = 2 2 p

Ekkor A(4;6) B(16;4) C(16;16) 1 p

A beírható kör sugara $\dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{12+12-12\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}51$ 2 p

Összesen 8 pont

4., $$\frac{\Pi}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 12}\right) = k\Pi \qquad k \in Z$$ 2 p

$$x - 2k = \sqrt{x^2 - 4x + 12} \quad \Big|^2$$

rendezés után $\quad 4x(k-1) = 4k^2 - 12 \quad k \neq 1$, $\quad x = \dfrac{k^2-3}{k-1}$ 2 p

$$x = \frac{(k-1)(k+1) - 2}{k-1} = k + 1 - \frac{2}{k-1}$$ 2 p

x egész, ha $\frac{2}{k-1}$ egész 2 p

Ebből k: -1 , 0 , 2 , 3 illetve x = 1 , 3 2 p

Összesen 8 pont

5., Legyenek az alapélek x és y , az oldalél z .
A feltételek szerint

$$xy = 1$$
$$4x + 4y + 4z = 20 \qquad 2\text{ p}$$
$$x + y + z = 5$$

A felszín $A = 2z(x+y) + 2$

A számtani és mértani közép kapcsolatából

$$(x+y)z \le \left(\frac{(x+y)+z}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \text{innen } A \le 2*\frac{25}{4} + 2 = \frac{58}{4} \qquad 4\text{ p}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha x + y = z , ekkor a felszín maximális A=$\frac{29}{2}$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ xy=1 \\ x+y=z \end{array}\right\} \text{ megoldása } x \ge y \text{ feltétellel } x=2 \text{ , } y=0.5 \text{ , } z=2.5 \qquad 2\text{ p}$$

Összesen 10 pont