Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1994.
IV. osztály

Fogalmazványt nem kell készíteni! Olvashatóan, szépen, tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani a feladatokat, elkülönítve egymástól. **Zsebszámológép és függvénytáblázat használható!**

1. Oldd meg a következő egyenletrendszert

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=1$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$$

$$6xy=1$$

15 pont

2. Ismeretes, hogy $3x+4y=47$ és $x>y>0$. Becsüld meg $x+y$ értékét!

9 pont

3. 5 szám közül a három első mértani, a négy utolsó számtani sorozatot alkot. A négy utolsó összege 20, a második és ötödik szorzata 16. Melyik ez ez öt szám?

14 pont

4. Egy kör kerületének **P** pontjából megrajzoljuk az **AP**=18 cm és **BP**=12 cm hosszúságú húrokat. Az **AP** húr **F** felezőpontjának a **BP** egyenestől mért távolsága 2 cm. Mekkora a kör sugara?

14 pont

5. Mely valós számokra teljesül:

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$$

14 pont

Szombathely, 1994. november

Versenybizottság

Bolyai János Matematika Verseny feladatainak megoldásai 1994.

IV. osztály

I. $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=1 \quad x,y,z \neq 0$ 1 pont

II. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$

III. $6xy=1 \quad \Rightarrow \quad xy=\frac{1}{6}$ 1 pont

I. $6+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=1$

I. $\frac{1}{z}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=-5$ 1 pont

II. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4-\frac{1}{z}$ 1 pont

I. $\frac{1}{z}(4-\frac{1}{z})=-5$ 1 pont

$(\frac{1}{z})^2-4*\frac{1}{z}-5=0$

$\frac{1}{z}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}$ 2 pont

$\frac{1}{z}=5 \qquad \frac{1}{z}=-1$

$z_1=\frac{1}{5} \qquad z_2=-1$

ha $z_1=\frac{1}{5}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1$

$xy=\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{6x}$

$\frac{1}{x}+6x=-1$

$6x^2+x+1=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{12}$ 3 pont

ha $z_2=-1$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$

$xy=\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{6x}$

$\frac{1}{x}+6x=5$

$6x^2-5x+1=0$

$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm 1}{12}$ 3 pont

ha $x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

ha $x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

tehát

$z = -1$	$z = -1$	
$x = \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{3}$	2 pont
$y = \frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{2}$	

Ő: 15 pont

2.
Mivel y>0, ha egyenletünk bal oldalából levonunk y-t, ezzel a bal oldalt kisebbítjük, tehát

(1) $3x + 3y < 47$, ebből $x + y < \frac{47}{3}$ 2 pont

Másrészt $x > y$ lévén, ha a bal oldalhoz $\frac{x}{2}$ – t hozzáadunk,

és egyidejűleg $\frac{y}{2}$ – t levonunk, ezzel a bal oldalt növeljük,

tehát 4 pont

(2) $3x + \frac{x}{2} + 4y - \frac{y}{2} = \frac{7}{2}(x+y) > 47$ és $x + y > \frac{94}{7}$ 2 pont

(1) és (2) a keresett x + y - t két határ közé szorítja

$\frac{47}{3} \approx 15.67 > x + y > \frac{94}{7} \approx 13.43$ 1 pont

Ennek az intervallumnak a meghatározásával választ adtunk a feladatban kitűzött kérdésre.

Ö: 9 pont

3.
a, aq, aq^2

I. $aq + aq + d + aq + 2d + aq + 3d = 20$

II. $aq * (aq + 3d) = 16$ 4 pont

I. $4aq + 6d = 20$
$2aq + 3d = 10$
$3d = 10 - 2aq$ 1pont

II. $aq * (aq + 10 - 2aq) = 16$ 1pont

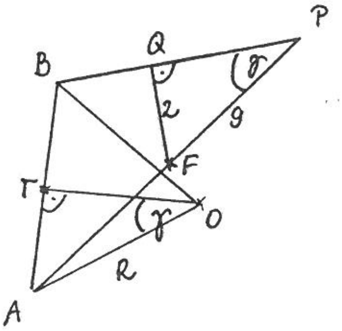
$(aq)^2 - 10aq + 16 = 0$

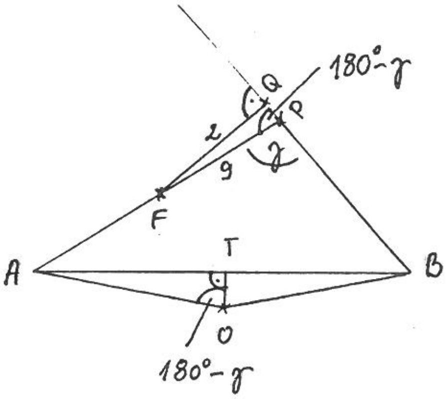
$aq = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$ 2pont

ha $aq = 8$ $d = -2$	ha $aq = 2$ $d = 2$
$aq^2 = aq + d$	$aq^2 = aq + d$
$8q = 6$	$2q = 4$
$q = \frac{3}{4}$ 2pont	$q = 2$ 2 pont
$a = \frac{32}{3}$	$a = 1$
$\frac{32}{3}$,8,6,4,2 1 pont	1,2,4,6,8 1 pont

Ö: 14 pont

4.





rajz: 2 pont

FQP háromszögben $\sin\gamma = \frac{2}{9}$ 1 pont

a, ha γ hegyesszög:

$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \frac{\sqrt{77}}{9}$ 1 pont

Az ABP háromszögben

$AB^2 = 12^2 + 18^2 - 2 * 12 * 18 * \cos\gamma$

$AB = 6.84cm$ 2 pont

TOA ∢ $= \gamma$ az azonos íven nyugvó középponti szögből

így ATO háromszögben $\sin\gamma = \frac{AB}{2R}$ 1 pont

$R = \frac{AB}{2\sin\gamma} = 15.4cm$ 2.pont

b, ha γ tompaszög

FQP háromszögben $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma = -\frac{\sqrt{77}}{9}$

Az APB háromszögben:

$AB^2 = 12^2 + 18^2 - 2 * 18 * 12 * \cos(180° - \gamma)$

$AB = 29.8cm$

AOT ∢ szintén $180° - \gamma$

AOT háromszögben:

$R_1 = \frac{AB}{2\sin\gamma} = 67.05cm$ 5 pont

Ö: 14 pont

5.

tgx és ctgx értelmezéséből $x \neq k\frac{\pi}{2}$, ahol $k \in Z$. 1 pont

Trigonometrikus összefüggések felhasználásával
a jobb oldal

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$$ 2 pont

alakba írható. Mindkét oldalt négyzetre emelve, a

$$2(1+\sin 2x)=\frac{4}{\sin^2 2x}$$ 2 pont

egyenletet kapjuk. Rendezés után $\sin 2x = a$ helyettesítéssel

$$a^3+a^2-2=0.$$ 1 pont

A bal oldalt alakítsuk szorzattá a következő módon

$$a^3+a^2-2=(a^3-1)+(a^2-1)=(a-1)(a^2+a+1)+(a-1)(a+1)=$$

$$=(a-1)(a^2+2a+2).$$ 2 pont

A második tényező minden valós a- ra pozitív, 1 pont
ezért a fenti szorzat akkor és csak akkor0, ha

$a=1$, azaz $\sin 2x = 1$. Ekkor $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $m \in Z$. 2 pont

Az ellenőrzés elvégzése után megállapítható, 1 pont
hogy m csak páros lehet. A megoldás:

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in Z.$$ 2 pont

Ö: 14 pont