Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1989.

IV. osztály

1. Egy háromszög kerülete 15cm; szögeinek aránya 3:4:5. Határozzuk meg a háromszög oldalait és szögeit!

6 pont

2. Létezik-e olyan x, amelyre

a) $\sin x \cos x = \sin 40^{\circ}$ 5 pont

b) $2^{\sin^2 x} = \sin x$? 6 pont

11 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$(x-y)(x^2-y^2) = 16$$
$$(x+y)(x^2+y^2) = 40$$

10 pont

4. Egy derékszörű háromszög oldalainak mérőszáma egy számtani sorozat három egymásutáni eleme. Az átfogóhoz tartozó magasság 2 egységgel rövidebb a hosszabbik befogónál. Mekkorák a háromszög oldalai?

13 pont

5. Tekintsük az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabola olyan húrjait, amelyek a parabola tengelypontjából derékszögben láthatók. Bizonyítsuk be, hogy ezek a húrok egy ponton haladnak át!

13 pont

Útmutató a versenydolgozatok értékeléséhez (1989.)
IV. osztály

1. A szögeket megkapjuk arányos osztással:

$$\alpha = 45^0, \qquad \beta = 60^0, \qquad \gamma = 75^0$$

1 pont

A kerületet fel kell osztani a szögek sinusainak arányában:

$$x = \frac{15}{\sin 45^0 + \sin 60^0 + \sin 75^0} (=5,91)$$

3 pont

Ezt felhasználva:

$a = x\sin 45^0 = 4,18$, $b = x\sin 60^0 = 5,12$, $c = x\sin 75^0 = 5,7$

2 pont

6 pont

2. a) $2\sin x\cos x = 2\sin 40^0$, 1 pont

azaz $\sin 2x = 2\sin 40^0 > 2\sin 30^0 = 1$ 2 pont

Ez viszont nem lehet, mert $-1 \leqq \sin 2x \leqq 1$ minden x-re, ezért az egyenlőség egyetlen x-re sem teljesül 2 pont

b) Mivel $\sin x \leqq 1$, ezért ha $\sin x < 1$, akkor $2^{\sin^2 x} > 1$ hiszen $\sin^2 x \geqq 0$. Tehát ebben az esetben az egyenlet nem teljesül. 3 pont

Ha $\sin x = 1$, akkor

$$2^{\sin^2 x} = 2 \ (\neq \sin x),$$

ami ellentmondáshoz vezet. Így ebben az esetben sem teljesül az egyenlőség 3 pont

11 pont

3. A beszorzások elvégzése után először a két egyenletet összeadva, majd kivonva egymásból az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$x^3+y^3=28$$
$$x^2y+xy^2=12$$

4 pont

A második egynlet 3-szorosát adjuk az elsőhöz:

$(x+y)^3=64$, amiből $x+y=4$ 3 pont

Így az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$x+y=4$$
$$x^2y+xy^2=12$$

amelynek megoldásai: $x=3$; $y=1$ ill.

$x=1$; $y=3$ — 2 pont

Ellenőrzés — 1 pont

10 pont

4. A feltételnek megfelelően a háromszög oldalai:

$a=x-d$, $b=x$, $c=a+d$, és a magassága $m=x-2$ — 2 pont

Minthogy a derékszögű háromszög oldalairól van szó, felírhatjuk:

$$(x+d)^2=x^2+(x-d)^2$$ — 2 pont

Innen (mivel $x\neq 0$) $x=4d$; és így az oldalak:

$a=3d$; $b=4d$; $c=5d$ — 3 pont

a magasság: $m=4d-2$ — 1 pont

Felírva a háromszög kétszeres területét kétféle módon kapjuk, hogy

$$3d4d=5d(4d-2)$$ — 2 pont

Ebből (mivel $d\neq 0$) $d=\frac{5}{4}$ — 2 pont

Így a háromszög oldalai: $a=\frac{15}{4}$; $b=5$; $c=\frac{25}{4}$ — 1 pont

13 pont

5. Mivel a parabola tengelypontja az origó, ezért a feltételnek megfelelő húrok végpontjait a parabolából az origón átmenő, két egymásra merőleges egyenes metszi ki, mely egyenesek egyenlete:

$$y=mx \quad \text{és} \quad y=-\frac{1}{m}x \quad (m\neq 0)$$ — 4 pont

A feltételnek megfelelő húrok végpontjai:

$A(4m;\ 4m^2)$; $B\left(-\frac{4}{m};\ \frac{4}{m^2}\right)$ — 4 pont

A két pont ismeretében a húrok egyenlete:

$$y=\left(m-\frac{1}{m}\right)x+4$$ — 4 pont

Innen látható, hogy a húrok mindegyike átmegy a $(0;\ 4)$ ponton. — 1 pont

13 pont