1802-1860

Bolyai János Megyei Matematika Verseny

2002

Feladatok
11. évfolyam

1. feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a pozitív számok halmazán!

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1+\dfrac{x+1}{y-1}}{1+\dfrac{y+1}{x-1}}=\dfrac{1}{3} \\ x^2+2y^2-4x-3y-2xy=0 \end{array}\right\}$$

$\boxed{10 \text{ pont}}$

2. feladat

Az ABC háromszög AB oldalára kifelé egy félkört rajzolunk. A BC oldal felezőpontja F. A BF és CF szakaszokra ugyancsak félköröket rajzolunk kifelé. Az AC oldal harmadolópontjai P és Q. Az AP, PQ és QC szakaszokra kifelé szintén félköröket rajzolunk. Az egyes oldalakon szereplő félkörök területeinek összegei egyenlők. Mekkorák a háromszög szögei? $\boxed{12 \text{ pont}}$

3. feladat

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$$

$\boxed{12 \text{ pont}}$

4. feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_{4-x}\left(x^2+16\right)+\log_{4-x}(2x+1)=\log_{4-x}2x+\log_{4-x}\left(x^2+21\right)$$

$\boxed{10 \text{ pont}}$

5. feladat

Egy trapéz párhuzamos oldalai a és b, ahol a > b. Milyen hosszú a szárakat a hosszabbik alaptól számított 2:3 arányban osztó pontokat összekötő szakasz? $\boxed{6 \text{ pont}}$

Bolyai János Megyei Matematikaverseny 2002.
Javítási útmutató
11. évfolyam

1. feladat

Az első egyenletből $x \neq 1$; $y \neq 1$, *és* $x \neq -y$ .... **1 pont**

Az első egyenletet átalakítva:

$$\frac{1+\dfrac{x+1}{y-1}}{1+\dfrac{y+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{y-1+x+1}{y-1}}{\dfrac{x-1+y+1}{x-1}}=\frac{x+y}{y-1}\cdot\frac{x-1}{x+y}$$ .... **2 pont**

Így az első egyenlet: $\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{3}$, ebből $y = 3x - 2$ .... **1 pont**

A második egyenletbe helyettesítve:

$x^2 + 2(3x-2)^2 - 4x - 3(3x-2) - 2x(3x-2) = 0$ egyenletet kapjuk

Rendezve: $13x^2 - 33x + 14 = 0$ .... **1 pont**

$$x_{1,2}=\frac{33\pm\sqrt{33^2-4\cdot 13\cdot 14}}{26}=\frac{33\pm 19}{26}$$ .... **1 pont**

Így $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{7}{13}$ .... **1 pont**

A megadott alaphalmazon csak az $x = 2$ jöhet szóba .... **1 pont**

ekkor $y_1 = 4$; $y_2 = -\frac{5}{13}$ .... **1 pont**

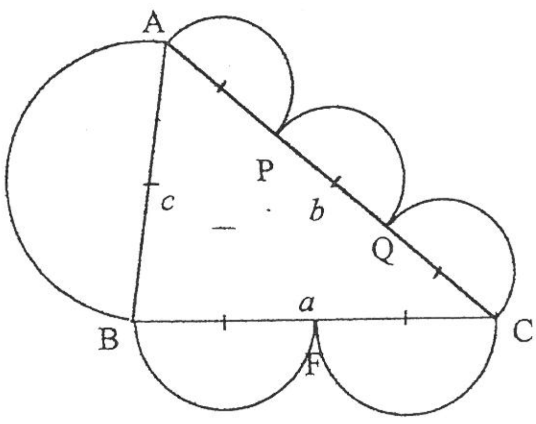
A (2;4) rendezett számpár a pozitív számok halmazán valóban megoldás .... **1 pont**

Összesen: 10 pont

2. feladat

Számítsuk ki az egyes oldalakra rajzolt félkörök területeit, és az egyes oldalakon levő félkörök területeinek összegét:

Ábra .... **1 pont**



Az AB oldalon $T_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$ ...... **1 pont**

A BC oldalon $T_2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$ .... **1 pont**

Az AC oldalon $T_3 = 3 \cdot \left(\frac{b}{6}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$ .... **1 pont**

A feltételek szerint $T_1 = T_2 = T_3$, azaz

$$\frac{c^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{a^2}{16}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\frac{c^2}{36}\cdot\frac{\pi}{2}$$ .... **1 pont**

$\frac{b^2}{36}$

Rendezve $\quad c^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{3}$ .... **1 pont**

Ebből a háromszög oldalait pl. a c oldallal kifejezve:

c ; $a = \sqrt{2}\,c$; $b = \sqrt{3}\,c$ .... **1 pont**

Pitagorasz tételének megfordításából következik, hogy a háromszög derékszögű, hiszen .... **1 pont**

$\cancel{1^2} + 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$ .... **1 pont**

Az egyik hegyesszögére pl. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$, ... **1 pont**

Innen $\alpha = 35{,}26°$ .... **1 pont**

Tehát a háromszög szögei: 90·°; 35,26°; 54,74° .... **1 pont**

Összesen: **12 pont**

3. feladat

A baloldalon álló kifejezés értelmezve van, ha

$1 + 2x \geq 0$ *és* $1 - \sqrt{1+2x} \neq 0$ *, azaz* .... **1 pont**

$x \geq -\frac{1}{2}$ *és* $x \neq 0$ .... **1 pont**

Mivel a baloldal pozitív, ezért az egyenlőtlenség csak úgy állhat fenn, ha

$2x + 9 > 0$, azaz $x > -\frac{9}{2}$ is teljesül. .... **1 pont**

Így az egyenlőtlenség megoldásai az $x \geq -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$ számhalmazban lehetnek.

.... **1 pont**

A baloldali tört nevezőjét gyöktelenítve:

$$\frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left[\left(1-\sqrt{1+2x}\right)\left(1+\sqrt{1+2x}\right)\right]^2} = \frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left[1-(1+2x)\right]^2} =$$

$$= \frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{4x^2} = 1 + 2\sqrt{1+2x} + 1 + 2x = 2 + 2x + 2\sqrt{1+2x}$$

x megengedett értékeire *(Lépésenként 1-1 pont)* .... **4 pont**

a következő egyenlőtlenség ekvivalens az eredetivel:

$2 + 2x + 2\sqrt{1+2x} < 2x + 9$ *, ebből* $2\sqrt{1+2x} < 7$ .... **1 pont**

A $\sqrt{x}$ szigorú monoton növekedése miatt .... **1 pont**

$4(1 + 2x) < 49$, ez $x < \frac{45}{8}$ esetén áll fenn .... **1 pont**

ezt az értelmezési tartománnyal összevetve:

$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}$, $x \neq 0$ megoldása a feladatnak .... **1 pont**

Összesen: **12 pont**

4. feladat

A logaritmus definíciója alapján a következő feltételeknek kell teljesülnie:

$4-x>0$; $4-x\neq 1$, $x>0$; $2x+1>0$ .... **1 pont**

A feltételeket egybevetve:

$0<x<4$ és $x\neq 3$ .... **1 pont**

A logaritmus azonosságait felhasználva az eredeti egyenletet így írhatjuk:

$\log_{4-x}[(x^2+16)\cdot(2x+1)]=\log_{4-x}[2x\cdot(x^2+21)]$ .... **1 pont**

A monotonitás miatt ebből a következő egyenletet kapjuk .... **1 pont**

$(x^2+16)\cdot(2x+1)=2x\cdot(x^2+21)$ .... **1 pont**

Rendezve az egyenletet:

$2x^3+x^2+32x+16=2x^3+42x$ .... **1 pont**

$x^2-10x+16=0$ .... **1 pont**

A kapott másodfokú egyenlet megoldásai:

$x_1=8$ és $x_2=2$ .... **1 pont**

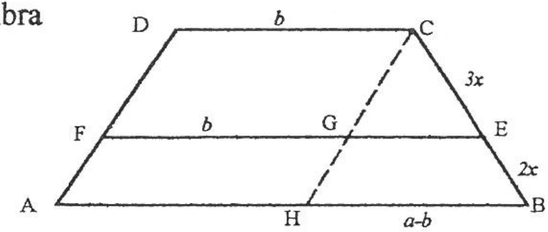
$x=8$ a feltételeknek nem felel meg, így nem megoldás .... **1 pont**

Ellenőrzés, az **$x=2$** megoldása az eredeti egyenletnek .... **1 pont**

Összesen: **10 pont**

5. feladat

Ábra .... **1 pont**



C-ből húzzunk párhuzamost az AD szárral .... **1 pont**

A HCB szög száraira a párhuzamos szelőszakaszok tételét .... **1 pont**
alkalmazva:

$$\frac{GE}{a-b}=\frac{3x}{5x}$$ .... **1 pont**

Ebből $GE=\dfrac{3a-3b}{5}$ .... **1 pont**

A keresett $FE=b+GE=\dfrac{3a+2b}{5}$ .... **1 pont**

Összesen: 6 pont

Maximálisan 50 pont érhető el.