Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1994.
III. osztály

Fogalmazványt nem kell készíteni! Olvashatóan, szépen, tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani a feladatokat, elkülönítve egymástól. **Zsebszámológép és függvénytáblázat használható!**

1. Az a,b és c pozitív számok szorzata 1. Számítsd ki a következő kifejezés értékét:

$$S = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}.$$

9 pont

2. Az **ABC** szabályos háromszög oldalai **a** hosszúságuak. Az **AC** és **AB** oldalakat érinti egy **r** sugarú kör. A **BC** és **AB** oldalakat érinti egy **2r** sugarú kör úgy, hogy a 2 kör egymást is érinti. Számold ki a körök sugarát !

10 pont

3. Számold ki két kör közös külső és belső érintőinek hajlásszögét !

$r_1 = 12{,}7$ cm $r_2 = 7{,}69$ cm $d = 34{,}8$ cm

ahol **d** a körök középpontjainak távolsága.

9 pont

4. Két szám összege szorozva négyzeteinek összegével 580-at ad. Ha különbségüket szorozzuk a négyzeteik különbségével az eredmény 160. Melyik ez a két szám?

14 pont

5. Keresd meg azokat a prímszámokat, amelyek egyszerre 2 prímszám összegeként illetve különbségeként is előállíthatók !

13 pont

Szombathely, 1994. november

Versenybizottság

Bolyai János Matematika Verseny feladatainak megoldása 1994.
III. osztály

1.
A feltevés szerint S mindhárom tagjának nevezője pozitív, a kifejezés mindig értelmezve van. A három törtet közös nevezőre hozhatjuk a következő fogással. Helyettesítsünk az első nevezőben 1 helyére abc-t.

3 pont

Egyszerűsítsük ezt a törtet a -val, másrészt bővítsük a harmadik törtet b -vel, és az új nevezőben első tagként adódó bca szorzat helyére írjunk 1-et:

5 pont

$$S=\frac{1}{b+1+bc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{1+bc+b}$$

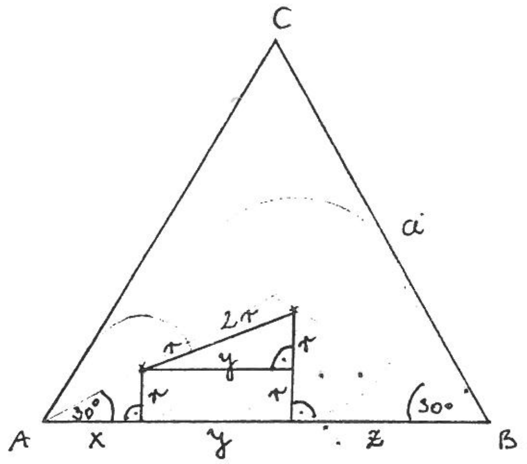
1 pont

Ekkor a három tört nevezője valóban közös, és a számlálók összege egyenlő vele, tehát

S=1.

Ö: 9 pont

2.



rajz: 2 pont

$$x+y+z=a$$

$$x:\ \operatorname{ctg}30^\circ=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\sqrt{3}$$

$$y:\quad y^2=9r^2-r^2\Rightarrow y=2r\sqrt{2}$$

$$z:\ \operatorname{ctg}30^\circ=\frac{z}{2r}\Rightarrow z=2r\sqrt{3}$$ 2-2-2 pont az x,y,z-re felírt egyenlet

$$r\sqrt{3}+2r\sqrt{2}+2r\sqrt{3}=a$$

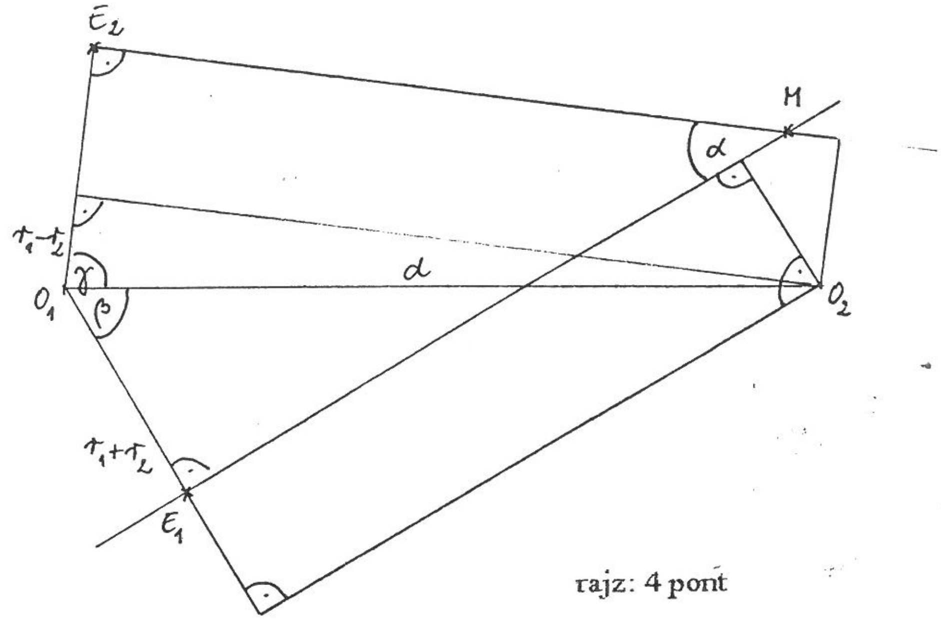
$$r(\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3})=a$$

$$r=\frac{a}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$$

végeredmény: 2 pont

Ö: 10 pont

3.



rajz: 4 pont

húrnégyszög: $O_1E_1ME_2$ 2 pont

$\cos\gamma = \frac{r_1 - r_2}{d} = \frac{5{,}01}{34{,}8} = 0{,}1470$ 1 pont

$\gamma = 81{,}54°$

$\cos\beta = \frac{r_1 + r_2}{d} = \frac{20{,}39}{34{,}8} = 0{,}5859$ 1 pont

$\beta = 54{,}13°$

$\alpha = 180° - (\gamma + \beta) = 44{,}33°$ 1 pont

Ö: 9 pont

4.

lásd következő oldalon

$(x+y)(x^2+y^2)=580$ * $\Rightarrow$ $x^3+xy^2+x^2y+y^3=580$ (I.) 1 pont

$(x-y)(x^2-y^2)=160$ $x^3-xy^2-x^2y+y^3=160$ (II.) 1 pont

II - I: $2xy^2+2x^2y=420$ 2 pont

II - I + I: $x^3+3xy^2+3x^2y+y^3=1000$ 2 pont

$(x+y)^3=1000$ 1 pont

$x+y=10$

$y=10-x$ 1 pont

behelyettesítve a * - gal jelölt képletbe:

$10(x^2+(10-x)^2)=580$ 1 pont

kifejezve

$2x^2-20x+42=0$

$x^2-10x+21=0$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{2}=\frac{10\pm4}{2}$$ 3 pont

ha $x=7$ $y=3$

$x=3$ $y=7$ 2 pont

Ö: 14 pont

5.

TFH. egyik prímszám sem 2, ekkor a keresett prím felírható:

2l+1+2k+1 1 pont

és

2n+1-2m-1 alakban is,de 1 pont

2l+1+2k+1=2(l+k+1) páros 1 pont

=> p=2 1 pont

2n+1-2m-1=2(n-m) páros 1 pont

lenne, de ez nem állítható elő két prímszám összegeként => 1 pont
az összegben és a különbségben is az egyik prím száma 2.

$p=p_1+2 \Rightarrow p_1=p-2$

$p=p_2-2 \Rightarrow p_2=p+2$ 1-1 pont

A feltétel szerint p-2 és p+2 is prímszám.

Áll.

p-2;p;p+2 közül valamelyik osztható 3 -mal p-2; p-1; p; p+1; p+2 között biztosan van 3-mal oszható.
TFH. p osztható 3-mal ekkor p-2=1 nem prím !! 1 pont
azaz vagy p-2 vagy p+2 osztható 3-mal, egyenlő 3-mal 1 pont

$p_1 = p - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 3$ és $p_2 = 7$ 2 pont

$p_2 = p + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad p = 1$ 1 pont

A keresett prím az 5.

Ö: 13 pont