BOLYAI JÁNOS MATEMATIKA VERSENY
2003/2004. TANÉV

10. évfolyam

Javítási útmutató

1. Egy apa és két különböző korú kisgyermekének életkora ugyanazon prímszám hatványai. Egy évvel ezelőtt mindhármuk életkora prímszám volt. Hány évesek? **6 p**

Csak egy páros prím van, a 2. E kivételével a prímszámok páratlanok, így hatványaik is páratlanok, a náluk egyel kisebb számok párosak. 1 p
Három páros prím nincs, így az életkorok csak a 2 hatványai lehetnek. 1 p
Mivel a pozitív egészek körében dolgozunk, ezért a szóba jöhető kettőhatványok: 1; 2; 4; 8; 16; 32 és 64. (A 128 éves apa talán már túlzás.) 1 p
A felsoroltaknál 1-gyel kisebb számok: 0; 1; 3; 7; 15; 31; 63. 1 p
Ezek közül csak a 3; 7 és 31 prímek. 1 p
Így az apa 32, míg a gyermekei 4 és 8 évesek. 1 p

2. Igazolja, hogy bármely a egész szám esetén az $a^3-25a+36$ kifejezés osztható 6-tal! **9 p**

Ha egy összeg mindkét tagja osztható hattal, akkor maga az összeg is, így a kifejezés hattal osztható, ha az a^3-25a osztható hattal. 1 p
Egy kifejezés akkor hattal osztható, ha osztható 2-vel is és 3-mal is. 1 p
Vegyük észre, hogy a-t kiemelhetjük: $a\cdot\left(a^2-25\right)$ 1 p
Szorzattá alakítva a kifejezést: $(a-5)\cdot a\cdot(a+5)$ 1 p
Ha a páros, akkor osztható kettővel a szorzat. 1 p
Ha a páratlan, akkor $a+5$ páros, osztható kettővel a szorzat. 1 p
Ha a osztható 3-mal, akkor a szorzat is osztható 3-mal. 1 p
Ha a 3-mal osztva 1-et ad maradékul, akkor a nála 5-tel nagyobb $a+5$ már osztható 3-mal, azaz a szorzat is osztható 3-mal. 1 p
Ha a 3-mal osztva 2-t ad maradékul, akkor a nála 5-tel kisebb $a-5$ már osztható 3-mal, azaz a szorzat is osztható 3-mal. 1 p

3. Határozza meg az összes olyan x valós számot, amely eleget tesz az alábbi egyenlőtlenségnek!
$$\frac{1}{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{x-\sqrt{x}}\le 1$$ **12 p**

A $\sqrt{\ }$ miatt $x\ge 0$. 1 p
Mivel tört nevezője nem lehet 0, ezért $x\ne 0$ és $x\ne 1$ 1 p
A törtek nevezőivel beszorozva tudjuk megoldani az egyenlőtlenséget, ehhez azonban meg kell vizsgálnunk, azok előjelét. Az első tört nevezője biztosan pozitív, a második azonban az $y=x$ és az $y=\sqrt{x}$ függvények ismeretében negatív, ha $0<x<1$, és pozitív, ha $1<x$ 1 p
Ha $0<x<1$, akkor a beszorzáskor a relációjel fordul, azaz:
$x-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}\ge\left(x+\sqrt{x}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x}\right)$ 1 p

Elvégezve a mûveleteket: $3x \geq x^2$ 1 p

Mivel x pozitív, nyugodtan leoszthatunk vele, s kapjuk: $3 \geq x$ 1 p

Összevetve a jelölt értelmezési tartománnyal kapjuk, hogy minden $x \in]0;1[$ megoldás. 1 p

Ha $1 < x$, akkor a beszorzáskor a relációjel marad, azaz:

$x - \sqrt{x} + x + \sqrt{x} \leq \left(x + \sqrt{x}\right) \cdot \left(x - \sqrt{x}\right)$ 1 p

Elvégezve a mûveleteket: $3x \leq x^2$ 1 p

Mivel x pozitív, nyugodtan leoszthatunk vele, s kapjuk: $3 \leq x$ 1 p

Összevetve a jelölt értelmezési tartománnyal kapjuk, hogy minden $x \in [3;\infty[$ megoldás. 1 p

Összegezve a feladat megoldása: $x \in]0;1[\cup [3;\infty[$ 1 p

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következõ egyenletet! $3x - 1 = [2x] + \left\{\frac{x}{2}\right\}$

$[x]$ az x egész részét, míg $\{x\}$ az x tört részét jelölik. **11 p**

Az egészrész definíciójából következik, hogy: $2x - 1 < [2x] \leq 2x$. 1 p

A törtrész definíciójából következik, hogy: $0 \leq \left\{\frac{x}{2}\right\} < 1$. 1 p

Ezeket felhasználva: $2x - 1 < 3x - 1 < 2x + 1$. 1 p

A két egyenlõtlenséget külön-külön megoldva kapjuk, hogy $0 < x < 2$. 1 p

Ebben az intervallumban mindvégig $\left\{\frac{x}{2}\right\} = \frac{x}{2}$. 1 p

Az egészrész függvénynek viszont négy különbözõ jelentése van, így ennyi egyenlet vár megoldásra. 1 p

Ha $0 < x < 0{,}5$, akkor $3x - 1 = \frac{x}{2}$, azaz $x = \frac{2}{5}$. 1 p

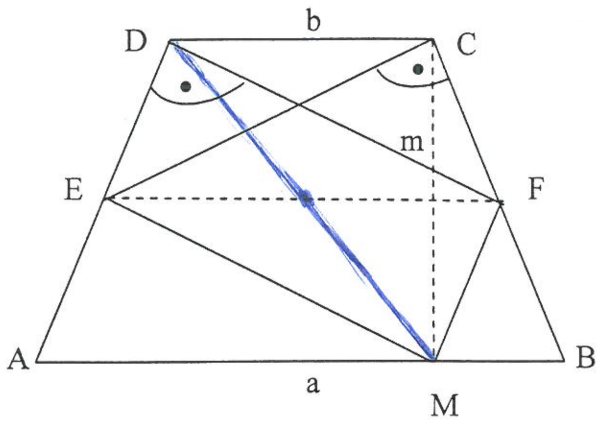
Ha $0{,}5 \leq x < 1$, akkor $3x - 1 = 1 + \frac{x}{2}$, azaz $x = \frac{4}{5}$. 1 p

Ha $1 \leq x < 1{,}5$, akkor $3x - 1 = 2 + \frac{x}{2}$, azaz $x = \frac{6}{5}$. 1 p

Ha $1{,}5 \leq x < 2$, akkor $3x - 1 = 3 + \frac{x}{2}$, azaz $x = \frac{8}{5}$. 1 p

Ellenõrzés után kijelenthetjük, hogy az egyenlet megoldásai: $x \in \left\{\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right\}$ 1 p

5. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b. A trapéz egyik szára felezõpontjának a másik szárra esõ merõleges vetülete ennek a szárnak egyik végpontjába esik. Számítsa ki a trapéz területét! **12 p**



Ábra 1 p

$ABCD$ nem lehet téglalap, mert ott az egyik oldal felezőpontjából a szemközti oldalra bocsátott merőleges felezi a szemben lévő oldalt. 1 p

Legyen $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ és $a > b$. A szárak felezőpontjait jelölje E és F.

A trapéz területe: $t = \frac{a+b}{2} \cdot m$. Meghatározandó m. 1 p

$ABCD$ szimmetriája folytán $CEF\Delta \cong DFE\Delta$ és derékszögű. 1 p

$CEF\Delta$-et $\overline{EF}$ középvonalra tükrözve C képe M. 1 p

$DEMF$ paralelogramma, mert szemközti oldalai egyenlők, 1 p

és téglalap is, mert EDF szög 90°-os. 1 p

Az átlók egyenlőségéből: $\overline{DM} = \overline{EF} = \frac{a+b}{2}$. 1 p

A tükrözés miatt $\overline{CM}$ merőleges az $\overline{EF}$-középvonalra,
amely b-vel párhuzamos, így MCD szög 90°. 1 p

MCD derékszögű háromszögre: $m^2 = \overline{DM}^2 - \overline{CD}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - b^2 = \frac{(a+3b)\cdot(a-b)}{4}$. 1 p

$m = \frac{\sqrt{(a+3b)\cdot(a-b)}}{2}$. A gyökvonás elvégezhető, mert a trapéz száraira $0 < b < a$ áll fenn. 1 p

Tehát: $t = \frac{(a+b)\cdot\sqrt{(a+3b)\cdot(a-b)}}{4}$. 1 p

Minden feladatnak csak egy - több nem áthúzott próbálkozás esetén az utolsó – megoldását pontozzuk! A közölt megoldásoktól eltérő helyes gondolatmeneteket is a teljesség foka szerint pontozzuk!