Bolyai János Matematika Verseny feladatai

2001-2002. tanév

10. évfolyam

1. Lackó előtt 100 Ft értékű 2 Ft-os pénzérme fekszik sorban, „fej" oldalukkal fölfelé. Először minden pénzérmét megfordít („írás" oldal kerül fölülre), majd minden másodikat fordít meg. A harmadik fordításnál minden harmadikat fordítja meg, a negyediknél minden negyediket, és így tovább, ...ötvenedszerre minden ötvenediket. Hány pénzérmének lesz az „írás" oldala fölfelé? **8 pont**

2. Számítsa ki A és B pontos értékét számológép használata nélkül **12pont**

$$A=2\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{8\sqrt{5}+24} \qquad B=\left(\frac{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{12}+\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{27}}\right)^2 \text{ !}$$

3. A háromjegyű $\overline{xyy}$ tizes számrendszerbeli szám számjegyeinek összege a kétjegyű $\overline{xz}$ szám. Ez utóbbi szám számjegyeinek összege y. Mi a háromjegyű szám legnagyobb prímosztója? **12pont**

4. Egy négyzet területe 2 egység. Húzzunk egy, a négyzet középpontján áthaladó egyenest, és tekintsük a távolságát a csúcsoktól! Mennyi e távolságok négyzetének összege? **10pont**

5. Milyen egész értékeket vehet fel az m, ha tudjuk, hogy **12pont**

$$x+3y=12$$

$$21x+62y=m$$

egyenletrendszer megoldásaként adódó számok nem negatívak?

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKA VERSENY javítási útmutatója
2001/2002. tanév

10. évfolyam

1. Egy érmét akkor fordítunk meg, ha a fordítás sorszáma osztója a pénzérme sorban elfoglalt helye sorszámának. — 1 pont
   Azok az érmék lesznek írással fölfelé, amelyeket páratlanszor fordítunk meg, azaz a helyük sorszámának páratlan darab osztója van. — 1 pont
   Vagyis van olyan osztója, amelynek osztópárja önmaga, tehát ezen osztó négyzete a sorszám. — 2 pont
   Az 50-nél nem nagyobb számok közül négyzetszámok:
   1; 4; 9; 16; 25; 36; 49. — 1 pont
   Tehát 7 db pénzérme lesz írással fölfelé. — 1 pont

8 pont

1. $A = 2\cdot\sqrt{6-2\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{4\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}+6\right)} =$
   $= 2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} - 2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} =$ — 4 pont
   $= 2\cdot\left|\sqrt{5}-1\right| - 2\cdot\left|\sqrt{5}+1\right| =$ — 2 pont
   mindkét abszolútértéken belüli szám pozitív, így
   $A = -4$ — 2 pont
   (Vagy A^2 meghatározásával, de tisztázni kell A előjelét)

$$B = \left(\frac{\frac{3}{2}\sqrt{12}+\frac{5}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{27}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3\sqrt{3}}\right)^2 =$$ — 2 pont

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{11}{2}\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(-\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}$$ — 2 pont

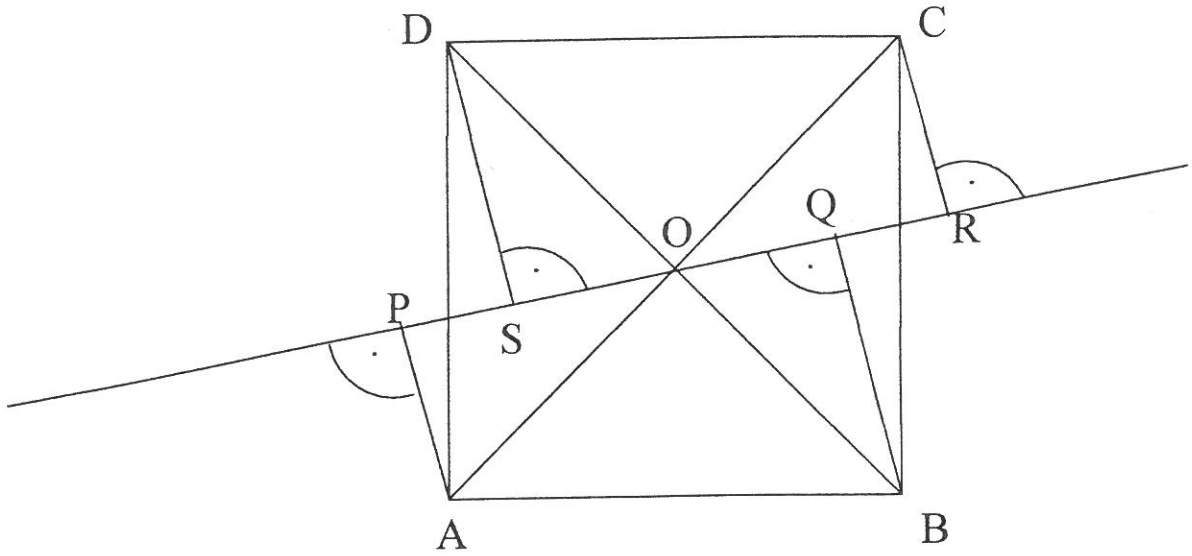
12 pont

3. Írjuk fel az $\overline{xz}$ kétjegyű számot: $10x + z$, ahol $x \neq 0$ — 1 pont
   $2y = 9x + z$ — 2 pont
   $x + z = y$ — 2 pont

   $2x + 2z = 9x + z$
   $z = 7x \Rightarrow x = 1$ és más nem lehet, mert z számjegy. — 3 pont
   A háromjegyű szám: 188. — 2 pont
   A 188 prímtényezős alakja: $2^2\cdot 47$. A legnagyobb prímosztó: 47. — 2 pont

12 pont

4.



A négyzet minden oldala $\sqrt{2}$; átlója 2 egység. 2 pont

AOP$\Delta \cong$ BOQ$\Delta \cong$ COR$\Delta \cong$ DOSΔ, mert derékszögük, egyik hegyesszögük és átfogójuk megegyezik. 3 pont

$AP = RC$; $DS = BQ = OP = OR$ 2 pont

$\Downarrow$

$2(AP^2 + PO^2) = 2\,AO^2 = 2$ 3 pont

10 pont

5. Az első egyenletből: $x = 12 - 3y$ (1) 1 pont
ezt a másodikba helyettesítve: $y = 252 - m$ 2 pont
Ezt (1)-be helyettesítve a műveletek elvégzése után:
$x = 3m - 744$ 2 pont
A megoldások nem negatívak, így $x = 3m - 744 \geq 0$, amiből $m \geq 248$ 2 pont
ill.
$y = 252 - m \geq 0$, amiből $252 \geq m$. 2 pont
Az egyenletrendszer megoldásai nem negatívak, ha

$248 \leq m \leq 252$ vagyis, ha

$m = 248; 249; 250; 251; 252.$ 2 pont

12 pont