2016/2017. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

9. évfolyam

1. A következő szám 21 számjegyből áll: 590827977203843653292
   A szám valamelyik számjegyét törölni szeretnénk és a helyére más számjegyet szeretnénk írni, hogy továbbra is 21 jegyű maradjon.
   a) Ki lehet-e így cserélni a fenti számban egy számjegyet, hogy osztható legyen 72-vel?
   b) Hányféle 12-vel osztható 21 jegyű számot kaphatunk a fenti számból egy számjegy megfelelő kicserélésével?
   (Válaszaidat indokold!)

2. Tibi egy sportcipőt szeretett volna vásárolni, de nem volt elég pénze rá. A sportbolt kínálatából négy sportcipő jöhetett szóba, Tibi érdekesnek találta, hogy összesen 20000 forintba kerültek. A bolt karácsony előtt árengedményeket hirdetett, ezért Tibi elment vásárolni. Az egyik cipőre 10% árengedményt adtak, ennek megvásárlásához Tibinek még 150 forintja hiányzott, a másikat 20%-kal árazták le, ehhez még 2200 forintja hiányzott, a harmadikat 25%-kal árazták le, ehhez még 1050 forint kellett volna. A negyedik cipőt 35%-kal árazták le. Tibi végül ezt vette meg, s a kasszánál még 10 forintot vissza is kapott. Mennyibe került Tibi cipője a leárazás előtt? *(Pontos értékekkel számolj!)*

3. Hány olyan négyjegyű természetes szám van, melyben van 2-es és 5-ös számjegy is, de nincs 7-es számjegy?

4. Egy ABCD szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja AB. Tudjuk, hogy AC átló milyen arányban osztja a trapéz két szögét, $BAC\angle : DAC\angle = 2 : 3$ és $DCA\angle : ACB\angle = 2 : 5$.
   a) Mekkorák a trapéz szögei?
   b) Igazold, hogy ha az átlók metszéspontja M, akkor AMB háromszög beírt körének középpontja egybeesik a trapéz körülírt körének középpontjával!
   c) Számold ki az AB alapnak és a trapéz magasságának pontos arányát!

5. Hat, látszatra egyforma régi aranypénz kerül egy gyűjtő birtokába. Az eladó azt mondja, hogy négy érme valódi, kettő pedig ügyes utánzat, de ő sem tudja, melyek azok a hat közül. A valódi érmék tömege azonos, az utánzatoké ennél egy kicsit kisebb, de a két utánzat tömege egymással megegyezik. A gyűjtő úgy véli, a gyűjteményébe elég egyetlen valódi érme, így egy barátjával három valódi érmét elcserél valamilyen más ritkaságra. A három valódi érme kiválasztásához egy precíz kétkarú mérleg áll rendelkezésére, melynek a két serpenyőjébe tárgyakat lehet tenni. A mérleg beáll egyensúlyi helyzetbe, ha a két serpenyő tartalma azonos tömegű, és jobbra vagy balra lebillen, ha a jobb vagy baloldali serpenyőben van nagyobb tömeg. A lehető legkevesebb számú méréssel kell kiválasztani három valódi pénzérmét. Legalább hány mérésre van szükség? Válaszodat indokold!

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pontot érhet el.

2016/2017. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

10. évfolyam

1. Add meg az összes olyan derékszögű háromszöget, melyre teljesül, hogy mindhárom oldal hossza egész szám, valamint a terület és a kerület mérőszáma megegyezik!

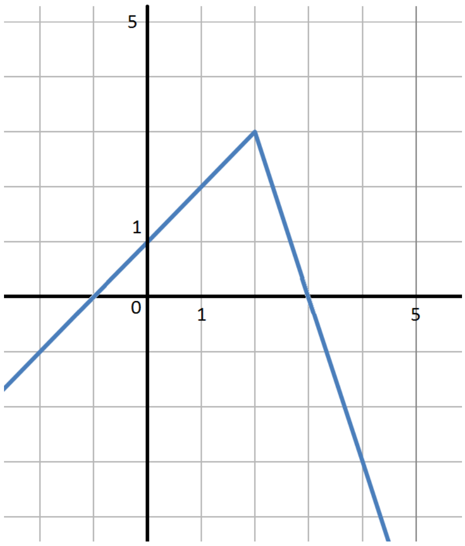
2. Add meg az egyenlet alaphalmazát, majd oldd meg a valós számok halmazán!

$$\left|\sqrt{4x^2+2x-2}-5\right| = 2x+6$$

3. a) Ábrázold a következő függvényt a koordináta-rendszerben! Számold ki, melyik lineáris függvények grafikonjaiból származtatható!

$$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$$
$$f(x) = x + |x-2| - |x+5|$$

b) Írd fel a mellékelt grafikonon látható függvény hozzárendelési szabályát! (A grafikon két félegyenesből áll.)



4. Adott egy 4 cm hosszú AB szakasz. Tekintsük azokat a megegyező körüljárású ABCD trapézokat, melyeknek A- nál és B-nél derékszögük van és kerületük 16 cm! Igazold, hogy e trapézok esetében a CD átmérőjű körök mind egy ponton mennek át!

5. Egy internetes áruház legutóbbi reklámkampányának eredményességét vizsgálja. Egy üzenetben testápoló szer, egy arckrém és egy kézkrém ajánlatát küldték szét az interneten. Akik a reklámot megkapták, azoknak 35%-a vásárolt a testápoló szerből, 5/14 része vett az arckrémből és 8/21 része vett a kézkrémből. Aki az egyik termékből rendelt, az, ha elégedett volt a termékkel, akkor utána mindkét másik termékből is rendelt, ha pedig a vásárolt termékkel nem volt elégedett, akkor többet egyikből sem nem rendelt.
   a) Ezen információk alapján legalább hány olyan vásárló lehetett, aki mindhárom termékből rendelt?
   b) A vizsgálatból még két információ derült ki:
      - 5 : 6 az aránya azoknak a vásárlóknak, aki csak a testápolóból, illetve akik csak a kézkrémből rendeltek, és nem rendeltek más terméket.
      - 315-tel több olyan személy volt, aki semmit nem rendelt, mint olyan, aki mindhárom termékből rendelt.

   Számold ki, hány személy vásárolt a kampány hatására!

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pontot érhet el.

2016/2017. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

11. évfolyam

1. Legyen adott a k kör, rajta hat pont a következő felsorolás szerinti sorrendben: A_1 és A_2 pontok egy k körbe írt szabályos ötszög két szomszédos csúcsa, a B_1, B_2, B_3 és B_4 pontok pedig egy k körbe írt szabályos tízszög négy szomszédos csúcsa. Igazold, hogy A_2B_4 merőleges A_1B_1-re!

2. Oldd meg az egyenletet!

$$10^{x^4-19x^2+81} = 10^{6x} \cdot 1\,000\,000\,000$$

3. A következő két jelölést vezetjük be: $x = \lg 50$ és $y = \lg 108$.

   Feladatod a $\boldsymbol{w} = \mathbf{lg}\left(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{375}}\right)$ pontos értékét olyan algebrai kifejezéssel felírni, mely csak racionális számokat, x-et és y-t tartalmaz, s csak a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) szerepelhet benne.

4. Hatan kártyáznak egy kör alakú asztalnál. Olyan játékot játszanak, melyben minden partiban valamelyik három egymás mellett ülő játékos van együtt, és a másik három játékos ellen játszanak. Így minden partit valamelyik három szomszédos helyen ülő játékos nyeri, ők ilyenkor 1-1-1 pontot kapnak. Az asztalnál ülő játékosok neve sorban: Béla, Feri, Géza, Tibi, Márk és Erik. Ha például az első partiban Feri és két szomszédja nyer, a másodikban Erik és két szomszédja nyer, akkor ezek lesznek az elért pontok:

név	B	F	G	T	M	E
pont	2	1	1	0	1	1

   Az alábbi táblázatban minden sor a hat játékos pontjait mutatja. Döntsd el, melyik sorban levő pontállás valósulhat meg ebben a kártyajátékban! Ha egy pontállás helyes, írd le, hogyan valósulhat meg, ha pedig nem, indokold, hogy miért!

név	B	F	G	T	M	E
pont	4	5	4	6	6	3
pont	4	11	8	16	9	12
pont	9	3	10	6	12	5
pont	3	5	4	7	8	9

5. Add meg a hozzárendelési szabályát annak a valós számok halmazán értelmezett f függvénynek, melyre teljesül, hogy

$$2f(x) + 3f(10-x) = x^2$$

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pontot érhet el.

2016/2017. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

12. évfolyam

1. Egy városban három fontos épület GPS koordinátái ismertek:
   A: 47,237 ; 16,632 Vasútállomás
   B: 47,239 ; 16,619 Kórház
   C: 47,222 ; 16,617 Plaza
   Ha kettőnek-kettőnek a légvonalban mért távolsága ismert, hány méter a harmadik kettő légvonalban mért távolsága?
   AB=1003 méter , BC=1884 méter, AC=? méter
   (A GPS-koordináták a városon belül olyan derékszögű koordináta-rendszer koordinátáinak tekinthetők, melyen a két tengely egysége eltérő, az egységenként berajzolt koordináta-rács itt egy téglalaphálózatot jelent.)

2. A 10, 11, …49, 50 pozitív egész számok közül hányféleképpen választhatunk ki hármat, hogy azok megfelelő sorrendben egy mértani sorozat szomszédos elemei legyenek? Add meg az összes megoldást és írd le, miért nincs több!

3. Oldd meg az alábbi egyenletet! Hány olyan pozitív megoldása van, mely (radiánban kifejezve) 2017-nél kisebb?

   $$\sin 2x + \cos 7x = 0$$

4. Egy ABCD háromszög alapú gúla öt élének hossza: AB= 15 cm, AC=8 cm, AD=20 cm, BC=17 cm és BD=25 cm. Tudjuk, hogy CAD$\angle$=90°.
   a) Számold ki a tetraéder pontos felszínét! (Az eredményt írd a lehető legegyszerűbb alakba!)
   b) Számold ki a tetraéder A-ból induló m magasságának hosszát 0,01 mm pontossággal!

5. Egy gráf csúcsai egy n elemű halmaz összes részhalmazai. Két csúcsot akkor köt össze él, ha a csúcsokban levő két részhalmaz pontosan egy elemben tér el – azaz az egyikben pontosan egy elemmel van több vagy kevesebb a másiknál.
   a) Rajzold le a gráfot n=3 esetén!
   b) Igazold, hogy a gráfnak $n \cdot 2^{n-1}$ darab éle van!

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pontot érhet el.