- A közölt megoldási utak a feladatoknak nem az egyetlen helyes megoldási módját adják meg, több eltérő megoldás is lehetséges.
- Az útmutatótól eltérő megoldásokat a kialakult tanári gyakorlat alapján, az útmutató pontjainak súlyozását alapul véve kell értékelni.
- Geometriai feladatok megoldásának elején a helyes ábrára jár az ott jelzett részpontszám, ha a versenyző az ábrát a szöveges leírásnak megfelelően használja.
- A feladatokat követő megjegyzések kitérnek néhány tipikus hibás megoldás pontozására.
- Minden évfolyamon 100 pont érhető el, minden iskolából a 50 ponton felüli dolgozatokat, illetve minden évfolyam három legjobbját kérjük beküldeni. Kérjük az összes olyan dolgozatok pontszámait, melyeket levélben nem küldtek el, de legalább 15 pontot elértek, a zsirp@freemail.hu címre elektronikus formában elküldeni.

9. évfolyam

1. Határozza meg az alábbi körülírásnak megfelelő három természetes számot!
   a) Az első szám kétjegyű, három különböző prímszám szorzata. Mindkét számszomszédja prímszám. Számjegyeinek szorzata pozitív.
   b) A második szám háromjegyű. 7-tel, 8-cal és 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, 11-gyel maradék nélkül osztható.
   c) A harmadik szám négyjegyű. Az első és a harmadik számjegye azonos, valamint a második és negyedik számjegye is megegyezik. Ez a szám két pozitív egész szorzatára bontható, ahol a tényezők különbsége 18.
   (A megoldások akkor teljesek, ha indoklást is tartalmaznak.)

Megoldás		**pont**
a)	A felbontásban szereplő 3 prím csak 2;3,5;7;11 és 13 közül lehet, 2·3·17 ugyanis már háromjegyű.	**1**
	2-nek szerepelnie kell, mert a két számszomszéd prím, azaz páratlanok, de 2 és 5 egyszerre nem szerepelhet, mert akkor a 0 végződés miatt a számjegyek szorzata 0, ami nem pozitív. Így egy 2-es tényező lesz a számban.	**2**
	Fentiek miatt csak 2·3·7 vagy 2·3·11 lehetséges, a többi szorzat túl nagy. Ezek közül a 42 a megfelelő.	**2**
b)	Ha a keresett x szám 7-tel, 8-cal és 9-cel osztva y maradékot ad, akkor $x–y$ értéke osztható mindhárom számmal, azaz a legkisebb közös többszörösükkel is, ami 504.	**4**
	Mivel ennek kétszerese már négyjegyű, emiatt 11-nek az 504-et követő első többszöröse lesz jó, ez pedig 506.	**3**
c)	Legyen a szám $x=\overline{abab}$ alakú, ekkor $x = 101 \cdot \overline{ab}$.	**5**
	Mivel 101 prím, és 101·(101+18) már négyjegyű, ezért a szám csak 101·(101-18)=8383 lehet.	**3**

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli válaszok esetén az a) részre 3 pont, a b) részre 3 pont, a c) részre 4 pont jár.*
- *Ha a versenyző leírja az összes olyan számot, amely egyik kérdés megválaszolásához szükséges, arra a kérdésre maximális pontot kap.*
- *Ha a versenyző kihagy egy számot a felsorolásból, vagy egy feleslegeset ír le, akkor az indoklás nélküli válaszok pontszámát kapja. Ha több hibája is van, nem kap pontot a kérdésre.*

2. Az uszoda jegypénztáránál 500 forintot krll kifizetni a forgalomban levő magyar fémpénzekkel (5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintos).
   a) Ha azt szeretnénk, hogy legalább egyet, de legfeljebb hármat adjunk mindegyik fajta pénzérméből, hányféleképpen fizethetünk?
   b) Ha 92 pénzdarabbal szeretnénk fizetni, hányféleképpen fizethetünk?
   (az érmék sorrendjét egyik esetben sem tartjuk lényegesnek)?

Megoldás	**pont**
a) Mivel minden pénzdarabból legalább egynek kell lennie, ezzel 5+10+20+50+100+200=385 forintot már kifizetünk, csak 115 forintot kell kifizetni, úgy, hogy minden pénzérméből legfeljebb 2 darab legyen. Tehát 200-ast	**4**

nem használhatunk már.	
Ha 100-as a legnagyobb pénzérme, akkor 20-as nem lehet, így csak a 100+10+5 jöhet szóba,	**1**
ha 50-es a legnagyobb pénzérme és egy van belőle, akkor 50+20+20+10+10+5 lehet csak,	**1**
ha két 50-es van, akkor az egy 100-as esetéhez hasonlóan folytatva 50+50+10+5 lehet csak.	**1**
Az eredeti 365 forintot is hozzávéve kis táblázattal írhatjuk fel az eredményeket:	**3**

200-as	**100-as**	**50-es**	**20-as**	**10-es**	**5-ös**
1	2	1	1	2	2
1	1	2	3	3	2
1	1	3	1	2	2

b) Sem 200-as, sem 100-as, sem 50-es nem jöhet szóba, mert akkor 450 Ft-nál is kevesebbet kellene 91 pénzdarabbal fizetni – ez pedig még 5-ösökkel is lehetetlen. Tehát csak 5, 10 és 20 forintosok lehetnek.	**2**
Ha veszünk 92 darab 5 forintost, akkor annak értéke 460 forint. Ki kell cserélni valahány 5 forintost 10-esre vagy 20-asra, hogy a darabszám megmaradjon és az összes pénzérték 40 forinttal nőjön.	**2**

- Egy 5-öst 10-esre cserélve 5 forinttal nő az érték, így 8 ilyen csere jó eredményt ad.
- Ha egyszer 20-asra cserélünk, akkor 15-tel nő az érték, emellett még ötször kell 10-esre cserélni.
- Ha kétszer 20-asra cserélünk, akkor 30-cal nő az érték, emellett még kétszer kell 10-esre cserélni.
- Három 20-asra már nem cserélhetünk, mert akkor 45-tel nőne az érték, ezért több eset nincs.

6

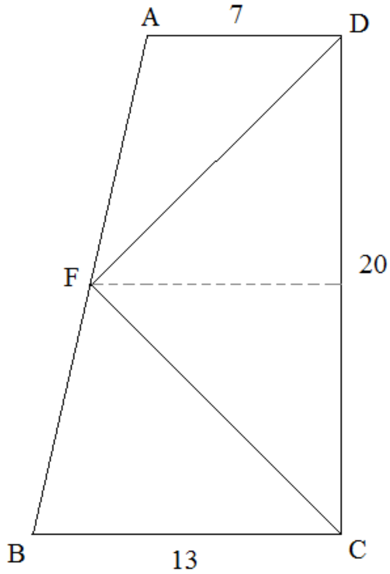
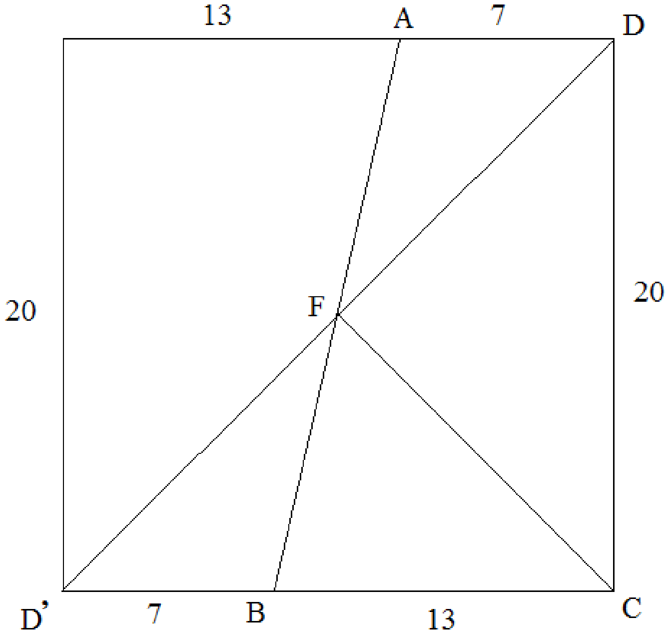
A kapott esetek:

20-as	**10-es**	**5-ös**
0	8	84
1	5	86
2	2	88

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli helyes megoldás az a) és a b) részben is 6 pontot ér.*
- *Minden hibás eredmény mindkét feladatrészben 3 pont levonásával jár, de a pontok száma nem lehet negatív.*

3. Egy ABCD négyszögben AD=7 cm, CD=20 cm, BC=13 cm, ADC∠=90°, BCD∠=90°. Legyen F az AB oldal felezőpontja!
   a) Rajzolja be az FD és FC szakaszokat. Számítsa ki a négyszögben így keletkezett részek területét!
   b) Mekkora az AFD∠ és BFC∠ szögek összege?
   (Válaszait indokolja!)

Megoldás	**pont**
A négyszög egy derékszögű trapéz. 	**5**
a) Az F-ből induló középvonal a DC oldalt két egyenlő részre osztja, hossza pedig (7+13):2=10 cm. Merőleges a CD szárra, mivel az alapokkal párhuzamos.	**2**
• AFD háromszög AD oldalhoz tartozó magassága 10 cm, ezért területe: $(7\cdot10):2=35\ cm^2$. • BCF háromszög BC oldalhoz tartozó magassága 10 cm, ezért területe: $(13\cdot10):2=65\ cm^2$. • DFC háromszög CD oldalhoz tartozó magassága 10 cm, ezért területe: $(20\cdot10):2=100\ cm^2$.	**3**
b) A négyszöget az F pontra tükrözve egy négyzetet kapunk, melynek F a középpontja. 	**6**
A tükrözés miatt AFD∠=BFD'∠ , emiatt AFD∠+BFC∠= 90°.	**4**

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli helyes válaszra az a) részben 2 pont, a b) részben 4 pont jár.*
- *Az első 5 pont a helyes ábráért jár.*
- *Egyszerűen megoldható a b) rész úgy is, ha a versenyző a DFC háromszögről a középvonal tulajdonságait kihasználva belátja, hogy egyenlő szárú derékszögű háromszög, s emiatt a keresett szögösszeg 90°.*

4. Három szomszédos háromjegyű természetes szám mindegyikének összeszorozzuk a számjegyeit. A három szorzat (nem feltétlenül eredeti sorrend szerint felsorolva): 0, 18 és 108. Melyik ez a három szám?
(A megoldás akkor teljes, ha indoklást is tartalmaz.)

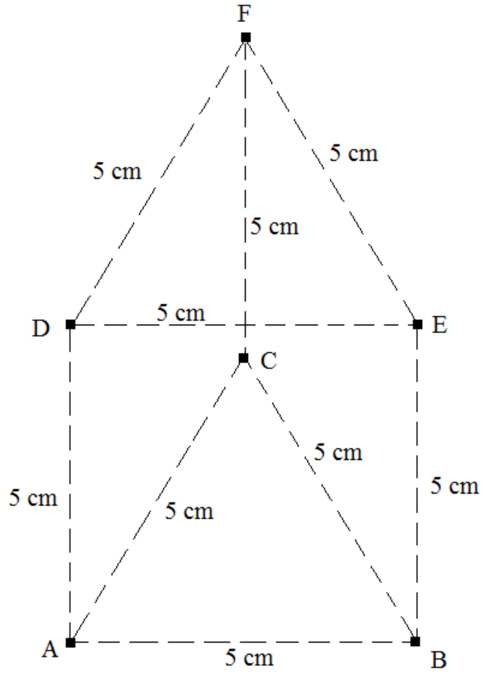
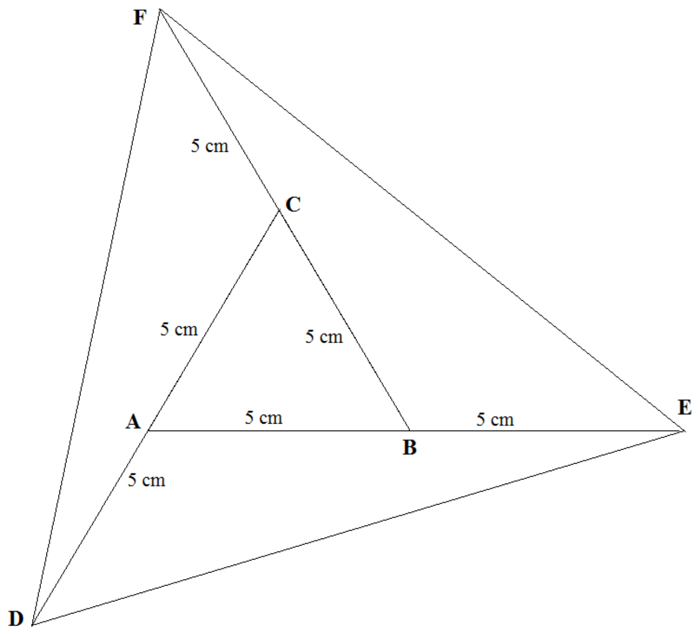
Megoldás	**pont**
A 0 szorzat 0 számjegyre utal. Ha csak a középső jegy 0, akkor a szám $\overline{x0y}$ alakú, és az ezt megelőző szám $\overline{x0z}$ alakú, az ezt köbvető szám $\overline{x0w}$ vagy $\overline{x10}$ alakú, azaz a másik két szám közül legalább az egyiknél 0 lenne a számjegyek szorzata. Tehát az egyik szám $\overline{xy0}$ alakú.	**3**
• Ha $\overline{xy0}$ a három közül az első, akkor a következő két szám $\overline{xy1}$ és $\overline{xy2}$ alakú, tehát a számjegyek szorzatának aránya 1:2 lenne – de ez nem teljesül a szorzatként megadott számokra.	**2**
• Ha $\overline{xy0}$ a három közül az utolsó, akkor az előző két szám $\overline{xp8}$ és $\overline{xp9}$ alakú, tehát a számjegyek szorzatának aránya 8:9 lenne – de ez nem teljesül a szorzatként megadott számokra.	**2**
Az $\overline{xy0}$ alakú szám tehát a középső szám. Előtte $\overline{x(y-1)9}$ áll, utána pedig $\overline{xy1}$ következik. Mivel 9(y–1) minden y számjegy esetén nagyobb, mint y, emiatt az első szám jegyeinek szorzata lesz a nagyobb, 108, és a harmadik számé 18.	**3**
Az előzőek szerint $x\cdot(y-1)\cdot 9=108$ és $x\cdot y=18$. Ebből adódik , hogy $(y-1):y=\frac{108}{9}:18=12:18=2:3$. Ha pedig két szomszédos számjegy aránya 2 : 3, akkor az a 2 és a 3.	**6**
Így a harmadik szám $\overline{x31}$ alakú, emiatt x=6. A három szám: 629, 630 és 631.	**4**

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli helyes válaszra 10 pont jár.*
- *A feladat megoldható a 18 és 108 prímfelbontásának vizsgálatával is.*

5. a) Adjon meg a síkon (szerkesztés leírásával vagy egyértelmű ábrával) 6 pontot úgy, hogy közülük mindegyik épp három másik ponttól legyen 5 cm-nyi távolságra!

   b) Adjon meg a síkon (szerkesztés leírásával vagy egyértelmű ábrával) 4 zárt háromszöglapot úgy, hogy a bármelyik két háromszöglap közös része egy 5 cm hosszúságú szakasz legyen! (A **zárt háromszöglap** olyan ponthalmaz, amely egy háromszög belsejében és a kerületén levő pontokból áll.)

Megoldás	**pont**
 Több megoldás is lehetséges, az ábrán egy szabályos ABC háromszög csúcsai 5 cm távolságra lettek eltolva, így keletkezett a DEF háromszög. A kérdéses pontok az A, B; C; D; E; F pontok.	**10**
 Több megoldás is lehetséges, az ábrán egy szabályos ABC háromszög oldalait 5 cm-rel hosszabbítottuk meg, így kaptuk D, E, F pontokat. A négy háromszög így: ABC, ADE, BEF és CFD.	**10**

Megjegyzések:

- *Hibás megoldásra nem adható pont.*
- *Ha (a fentihez hasonlóan) egyértelmű ábrákat ad meg a versenyző, leíró szöveg nélkül is maximális pontot kaphat.*