

2012. évi Bolyai János Megyei Matematikaverseny

9. osztály

- Igazoljuk, hogy az alább megadott számok egyike sem lehet egy egész szám négyzete!
 - $5^{21} + 1$
 - $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100$
 - $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{30}$
 - 4444...4 (21 darab 4-es számjegyből álló szám)
 - A 4000 összes pozitív osztóinak összege
- Egy szimmetrikus trapéz hegyesszögét a belőle kiinduló átló felezi.
 - Igazolja, hogy minden ilyen trapéznek van három egyenlő oldala!
 - Mekkorák egy ilyen trapéz szögei, ha azt is tudjuk, hogy az átlók egyenlőek a hosszabbik alappal?
- Három diák beszélget:

Béla: Van 10 kis kártyám, mindegyiken egy-egy pozitív egész szám szerepel. Válasszatok ki akárhány kis kártyát, adjátok össze a rajtuk levő számokat és mondjátok meg az eredményt! Én mindig meg fogom mondani, hogy hány kártyát választottatok ki.

Pista: Ebben semmi trükk nincs, hisz ha minden lapodon egy 1-es áll, akkor az összeg épp a lapok számát adja!

Béla: De minden kártyámon különböző szám van.

Laci: Akkor a 10 első tíz hatványa lehet a lapokon, így még azt is meg tudod mondani az összegből, melyik lapokat választották!

Béla: Nem ez a trükk, mert az én kártyáimon minden szám kétjegyű.

Adjon meg 10 számot, amely szerepelhet Béla kártyáin! Hogyan okoskodja ki Béla e lapok esetén az összegből, hány kártyát választottak ki?
- Pisti szeret kerékpározni. Egy alkalommal először egy órát biciklizett 30 km/h átlagsebességgel, aztán kissé fáradtabban még 20 km-t tett meg 50 perc alatt. Ezután műszaki hiba miatt tolnia kellett a kerékpárt a hátralévő harmadik szakaszon. A két utolsó szakaszon 12 km/h volt az átlagsebessége, a teljes úton pedig 17,4 km/h. Összesen milyen hosszú utat tett meg a három szakaszon?
- Egy bűvész felír egy számot egy papírra, majd leteszi az asztalra. Ezután megkéri az egyik nézőt, gondoljon egy 20 és 150 közé eső egész számra. A nézőnek e számot meg kell szoroznia hattal, majd az eredményt az eredetileg gondolt szám mögé kell írni. Az így kapott számot meg kell szorozni kettővel. Ez a végeredmény, ezt felírják a színpadon levő táblára. (Például ha az eredet szám 47, akkor ennek hatszorosa 282, így 47282 lesz, ha a szám mögé írják. Ennek kétszerese, azaz 94564 kerül a táblára.) Mindenki meglepetésére a táblán levő „hosszú” számot az eredetileg gondolt számmal elosztva egészet kap a néző! A második meglepetés pedig az, hogy a bűvész az osztás hányadosát előre megjósolta, a papírra ez van felírva az asztalon!
 - Mi a trükk matematikai magyarázata?
 - Vajon miért 20 és 150 közé eső számot kért a bűvész? Meddig bővítheti ezt az intervallumot, hogy sikerüljön a mutatvány?

Mindegyik feladat 20 pontot ér.