BOLYAI JÁNOS MATEMATIKA VERSENY
2003/2004. TANÉV

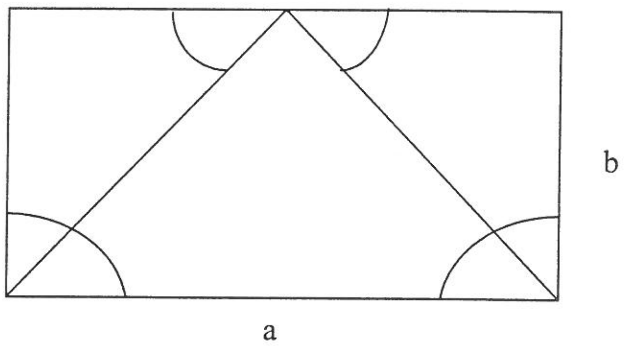
9. évfolyam

Javítási útmutató

1. Egy téglalap kerülete 30 cm, két szomszédos szögének szögfelezői az egyik oldalon metszik egymást. Hány cm^2 a téglalap területe?

7 pont

Jelöljük a téglalap oldalait a-val és b-vel. Rajzoljuk meg két szomszédos szög szögfelezőjét! Így egyenlőszárú, derékszögű háromszögek keletkeznek. (1 pont)
A rajz alapján egyértelmű, hogy $a = 2b$ (1 pont)



Így a kerület felhasználásával:
$K = 2(a + b)$ (1 pont)
$30 = 2(2b + b)$ (1 pont)
$b = 5$ cm és $a = 10$ cm. (1 pont)
A téglalap területe: $T = ab$, (1 pont)
azaz $T = 50\ cm^2$. (1 pont)

2. Hány olyan legfeljebb hatjegyű pozitív szám van, amelyben előfordul az 1-es számjegy?

8 pont

Legfeljebb hatjegyű pozitív szám összesen 999 999 darab van, (1 pont)
hiszen ide tartozik 1-től 999 999-ig minden egész szám. (1 pont)
Ha ebből levonjuk az 1-est nem tartalmazó számok halmazát, akkor megkapjuk a megoldást. (1 pont)
Ha 1-est nem tartalmazhat a szám, akkor csak 9 számjegy fordulhat elő, (1 pont)
figyelembe kell vennünk, hogy a számjegyek ismétlődhetnek is, (1 pont)
és a szám maximum hatjegyű lehet. (1 pont)
Mindezen feltételeknek 9^6 db szám tesz eleget. (1 pont)
Tehát $999\,999 - 9^6 = 468\,558$ db olyan legfeljebb hatjegyű pozitív szám létezik, amelyben nem szerepel az 1-es. (1 pont)

3. Bizonyítsa be, hogy bármilyen **a** természetes szám esetén az

$(\mathbf{a^2 + 3a + 1})^2 - \mathbf{1}$ kifejezés osztható 24-gyel!

10 pont

Alakítsuk szorzattá a kifejezést! (1 pont)

$(a^2 + 3a + 1)^2 - 1 = (a^2 + 3a + 1 + 1)(a^2 + 3a + 1 - 1) =$ (1 pont)

$= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) =$ (1 pont)

$= a(a + 3)(a + 1)(a + 2) =$ (1 pont)

$= a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$ (1 pont)

A 24-gyel való oszthatóság feltétele, hogy a szám osztható legyen 2-vel, 3-mal és 4-gyel. (1 pont)
A kapott kifejezés négy egymást követő természetes szám szorzata, (1 pont)
ezért biztosan található közöttük legalább egy, amely osztható 3 – mal, (1 pont)
egy pedig 4 – gyel. (1 pont)
Minden második szám osztható 2 – vel, így a 4 – gyel osztható számon kívül még biztosan van egy kettővel osztható is. Ezért az adott kifejezés osztató 24 – gyel. (1 pont)

4. Melyik az a négyjegyű szám, amelyre igaz, hogy

$$\begin{array}{r} \mathbf{abcd} \\ \mathbf{abc} \\ \mathbf{ab} \\ + \quad \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{2003} \end{array} \ ?$$

10 pont

Írjuk fel az összeadást más formában:

$1000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c + 10a + b + a = 2003$ (1 pont)

Összevonva: $1111a + 111b + 11c + d = 2003$ (1 pont)

Mivel $1 < a < 9$ és $0 < b, c, d < 9$; (1 pont)

az egyenletből világosan látszik, hogy csak az $a = 1$ lehetséges. Ekkor: (1 pont)

$111b + 11c + d = 892$ (1 pont)

ahonnan csak $b = 7$ vagy $b = 8$ lehetséges. (1 pont)

Ha $b = 7$, akkor $11c + d = 115$ egyenletnek nincs az adott feltételek mellett megoldása. (1 pont)

Ha $b = 8$, akkor $11c + d = 4$ egyenletet kapunk, (1 pont)

amelynek csak $c = 0$ esetén van megoldása. Ekkor $d = 4$. (1 pont)

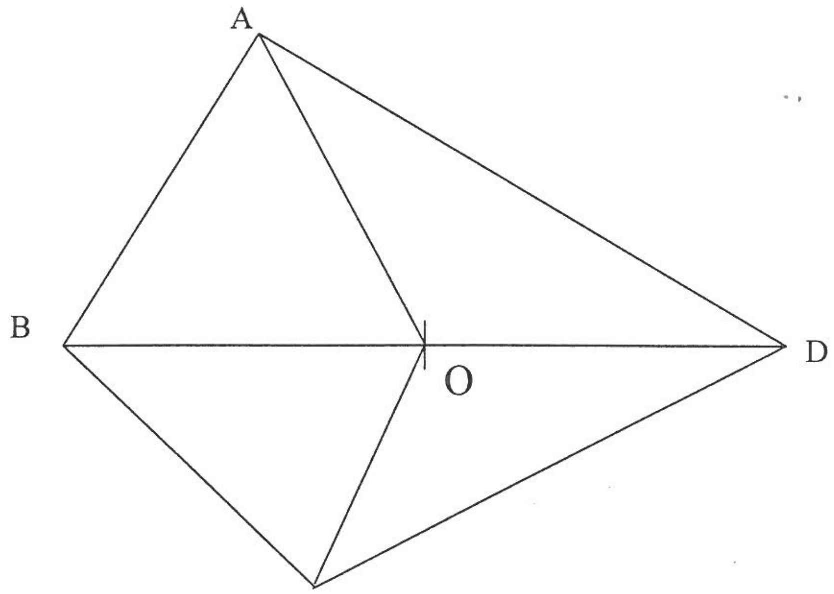
A keresett négyjegyű szám tehát az 1804. (1 pont)

5. Adott az ABCD konvex négyszög. Határozzuk meg a négyszög belsejében azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre az ABCP és ADCP négyszögek területe egyenlő!

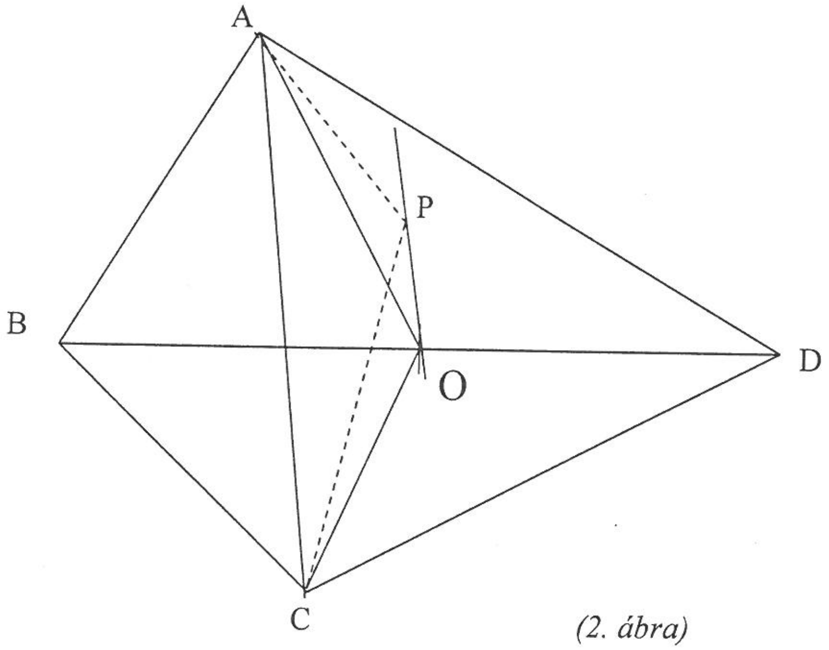
15 pont

Adott az ABCD konvex négyszög. Legyen O a BD átló felezőpontja. *(1.ábra)* (1 pont)
Az O pont nyilván megfelel a feltételnek, (1 pont)
hiszen a BAO háromszög területe egyenlő a DAO háromszögével, (1 pont)
mert OB = OD, (1 pont)
és a két háromszög magassága megegyezik: A pont távolsága az átlótól. (1 pont)
Ugyanígy a BOC háromszög területe is megegyezik a DOC háromszögével. (1 pont)
Tehát AOCB négyszög területe egyenlő ADCO négyszög területével,
mindkettő fele az eredeti négyszög területének. (1 pont)

Ha most O-n át párhuzamost húzunk az AC átlóval, akkor ennek a négyszögbe eső minden pontja jó, *(2. ábra)* (1 pont)
hiszen az AOC háromszög területe egyenlő az APC háromszögével, (1 pont)
mert AC oldal közös, a hozzá tartozó magasság pedig a párhuzamosságból következően szintén azonos nagyságú. (1 pont)
$t_{AOC} + t_{ABC} = t_{AOCB}$
$t_{APC} + t_{ABC} = t_{APCB}$ (1 pont)
$t_{AOCB} = t_{APCB}$ (1 pont)
Így az ABCP négyszög területe változatlanul fele az ABCD négyszög területének. (1 pont)
Más pont nem felel meg a kikötésnek. (1 pont)



(1. ábra)



(2. ábra)

Minden feladatnak csak egy - több nem áthúzott próbálkozás esetén az utolsó – megoldását pontozzuk! A közölt megoldásoktól eltérő helyes gondolatmeneteket is a teljesség foka szerint pontozzuk!