Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1994.
I. osztály

Fogalmazványt nem kell készíteni! Olvashatóan, szépen, tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani a feladatokat, elkülönítve egymástól. **Zsebszámológép és függvénytáblázat használható!**

1. Egy lakásban öten laknak. Kovács, a felesége, felnőtt fiuk, Kovács nővére és édesapja. Mind az öten dolgoznak. Egyikük kereskedő, a másik ügyvéd, a harmadik postás, a negyedik mérnök, az ötödik tanító.. Az ügyvéd és a tanító nem vérrokonok. A kereskedő idősebb a sógornőjénél és a tanítónál. A mérnök idősebb a postásnál.
Kinek mi a foglalkozása?

7 pont

2. Bizonyítsd be, hogy 2 és 3 kivételével bármely prímszám négyzete 12-vel osztva 1 maradékot ad !

7 pont

3. Írj számjegyeket az A, B, C betűk helyére úgy, hogy teljesüljön az

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{ABC}$$

egyenlőség. (Különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek; és pl. AB azt a kétjegyű számot jelenti, melynek első jegye A második jegye B.)

8 pont

4. Húzz az **ABC** háromszög beírt körének középpontján keresztül párhuzamost a **BC** oldallal. Ez az **AB** oldalt **M**, az **AC** oldalt **N** pontban metszi. Mekkora az **AMN** háromszög kerülete, ha **AB** =12 cm, **BC** = 24 cm, **AC** = 18 cm ?

8 pont

5. **A** és **B** **MN** távon versenyt fut. Egyszerre indulnak **M**-ből. **A** ér előbb **N**-be, mint **B**, és **N**-ből visszafordulva **N**-től 100 méterre találkozik **B**-vel. **A** 4 perccel előbb ér vissza **M**-be, mint **B**. Ha **A** ismét visszafordulna, az **MN** távolság **M**-től számított 1/5 részénél találkozna **B**-vel. Mekkora **A** és **B** sebessége és az **MN** távolság?

12 pont

Szombathely, 1994. november

Versenybizottság

Bolyai János Matematika Verseny feladatainak megoldása 1994.
I. osztály

1.
A negyedik mondatból arra következtethetünk, hogy Kovácsné ügyvéd vagy tanító.
2 pont

Az ötödik mondatból már láthatjuk, hogy Kovács nővére a kereskedő, Kovács a tanító.
2 pont

Ekkor már tudjuk, hogy Kovácsné az ügyvéd.
1 pont

A hatodik mondatból megtudjuk, hogy Kovács apja mérnök, a fia pedig postás.
2 pont

Ö: 7 pont

2.
<u>Áll.</u>

$12 \mid p^2 - 1$ 1 pont

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$

p páratlan => 1 pont
p-1 és p+1 is páros, 1 pont
vagyis $p^2 - 1$ osztható néggyel! 1 pont
p prím és $p \neq 3$ és p-1; p; p+1 közül valamelyik biztosan osztható 3-mal => 1 pont
p-1 vagy p+1 is osztható 3-mal => 1 pont

<u>$p^2 - 1$</u> osztható 4*3 - mal. 1 pont

Ö: 7 pont

3.
Az összeadást a szokásos elrendezés (séma) szerint felírva

$$\begin{array}{r} AB \\ BC \\ +CA \\ \hline ABC \end{array}$$

még jobban látjuk, hogy $\overline{BC}$ - nek 2 pont
az összeadandók közül és az összegből való elhagyásával a feladat egyszerűbbé válik:

$$\begin{array}{r} AB \\ +CA \\ \hline A\,00 \end{array}$$ 2 pont

Azt is tüstént látjuk, hogy A=1, az összeg csak 100 lehet, hiszen a két összeadandó egike sem éri el a százat, nem érheti el összegük a 200-at. 2 pont

Cseréljük még fel a két összeadandó utolsó jegyét:

$$\begin{array}{r} 1\,B \\ C\,1 \\ \hline 1\,00 \end{array}$$

és

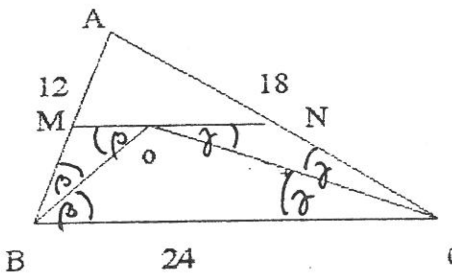
$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ C\,B \\ \hline 1\,00 \end{array}$$

innen nyílvánvalóan $\overline{CB} = 89$ (bár a csere nélkül is látható), végül C=8, B=9. 2 pont

----

Ö: 8 pont

4.



$OBC\sphericalangle = BOM\sphericalangle = \beta$ 1 pont

$OCB\sphericalangle = CON\sphericalangle = \gamma$ 1 pont

ezekből következik:

BOM háromszög és CON háromszög egyenlő szárú

MO = BM és NO = CN 2 pont

rajz: 2pont

Az AMN háromszög kerülete:

$k = AM+MO+ON+AN = (AM+BM)+(AN+CN) = 30$

BM+CN 12 + 18 2 pont

Ö: 8 pont

5.

Legyen MN = x, v_A, v_B a két sebesség. Az első találkozásig A (x+100), B (x-100) métert tett meg. Mivel egyszerre indultak menetidejük egyenlő.

$$\frac{x+100}{v_A} = \frac{x-100}{v_B} \quad (1)$$ 2 pont

Oda-vissza a 2x utat A $\frac{2x}{v_A}$, B $\frac{2x}{v_B}$ perc alatt teszi meg. A 4 perccel hamarabb ér M-be, így:

$$\frac{2x}{v_A} + 4 = \frac{2x}{v_B} \quad (2)$$ 2 pont

Ha A visszafordulna, a találkozásig $(2x + \frac{x}{5})$, B $(2x - \frac{x}{5})$ utat tenne meg, egyenlő idő alatt

$$\frac{2x + \frac{x}{5}}{v_A} = \frac{2x - \frac{x}{5}}{v_B} \quad (3)$$ 2 pont

(1 - ből) $\frac{v_A}{v_B} = \frac{x+100}{x-100}$

$$\Rightarrow \frac{x+100}{x-100} = \frac{11}{9}$$

(3 - ból) $\frac{v_A}{v_B} = \frac{11x}{9x} = \frac{11}{9}$

$x = 1000$ m

4 pont

$v_A = \frac{11}{9} v_B$ és $x = 1000$ m a (2 - be)

$v_B = \frac{1000}{11} \frac{m}{perc}$ és $v_A = \frac{1000}{9} \frac{m}{perc}$

2 pont

Ő: 12 pont