Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1991

I. osztály

1./ Igazoljuk, hogy $\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6}$ bármely egész m-re egész szám!

7 pont

2./ Egy szám 7-tel osztva 2-t, 8-cal osztva 4-et ad maradékul. Az első esetben a hányados 7-tel nagyobb, mint a 8-cal való osztásnál. Melyik ez a szám?

8 pont

3./ Egy ember elszegődött dolgozni. A gazda ígért neki egy évre 12 ezüstöt és 1 kabátot. A munkás 7 havi munka után kilépett és kapott 5 ezüstöt és a kabátot. Mennyit ér a kabát?

8 pont

4./ Adott az ABC derékszögű háromszög. Vegyük fel az AB átfogón az M pontot úgy, hogy BM = BC legyen, továbbá legyen N az AC befogón az a pont, melyre CN = CH, ahol H a C-ből húzott magasságvonal talppontja. Mutassuk meg, hogy ekkor MN merőleges AC-re!

8 pont

5./ a.) Van-e az 1, 11, 111, 1111, ... 111111, ... számok között az elsőn kívül négyzetszám?

12 pont

b.) Melyik nagyobb:

7 pont

$$\frac{3^{1989}-2}{3^{1990}-2} \quad \text{vagy} \quad \frac{3^{1990}-2}{3^{1991}-2} \quad ?$$

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért az eredeti pontszám fele adható.

Szombathely, 1991. november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas Megyei Tagozata

Javítási útmutató

I. osztály

1./ Az $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{m(m+1)\cdot(m+2)}{6}$ 4 p

és m, m+1, m+2 számok közül valamelyik osztható 3-mal, illetve 2-vel, így szorzatuk osztható 6-tal. 3 p

7 p

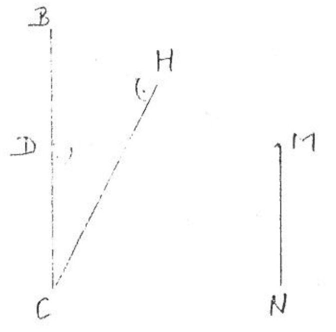
2./ Legyen a 7-tel való osztás hányadosa x,
így a keresett szám: 7x+2 2 p
a 8-cal való osztásnál a hányados x-7
a szám 8(x-7)+4 2 p
így: 7x+2 = 8(x-7)+4
x=54 2 p
a szám 7x54+2= 380 1 p
Ellenőrzés 1 p

8 p

3./ 7 hónapra 7 ezüst és $\frac{7}{12}$ kabát 2 p
Tehát $\frac{1}{12}$ kabát értéke $\frac{2}{5}$ ezüst 4 p
a kabát értéke: 12 x $\frac{2}{5}$ ezüst = $\frac{24}{5}$ ezüst 2 p

8 p

4./



1./ Mivel CB=BM ábra 2 p
CBM egyenlőszárú
és DM=CH (magasságvonal) 2 p

2./ Feltétel miatt CH=CN
tehát DM=CN 2 p

3./ DCN $\sphericalangle$ = CDM $\sphericalangle$ = 90^0
DCNM négyszög téglalap
A Tehát MN $\perp$ AC 2 p

8 p

5/1. 1-re csak a $10a+1$ — 2 p

illetve a $10b+9$ alakú — 2 p

számok négyzete végződhet.

$(10a+1)^2 = 20(5a^2+a)+1$ — 3 p

$(10b+9)^2 = 20(5b^2+9b+4)+1$ — 3 p

a tízesek helyén álló szám páros,

tehát ilyen szám nincs. — 2 p

12 p

5/2. Legyen: $a=3^{1989}$ — 2 p

a két tört különbsége:

$$\frac{(a-2)(9a-2)-(3a-2)^2}{(3a-2)(9a-2)} = \frac{-8a}{(3a-2)(9a-2)} < 0$$ — 4 p

Tehát a második tört nagyobb — 1 p

7 p

Összes pontszám: 50