BOLYAI JÁNOS MATEMATIKA VERSENY
2003/2004. TANÉV

12. évfolyam

Javítási útmutató

1.) Legyen **n** tetszőleges pozitív egész szám.

Mennyi a maradék, ha az $\mathbf{1^n+2^n+3^n+4^n}$ összeget elosztjuk 4-gyel?

Ha n=1, akkor az összeg 1+2+3+4=10, azaz a maradék 2. 1 p

Ha $n\geq2$, akkor az $1^n+2^n+3^n+4^n$ összeg osztási maradéka 4-gyel osztás esetén nem függ a 2 és a 4 hatványaitól. ($2^n=4\ 2^{n-2}$, és $4^n = 4\ 4^{n-1}$). 1+1 p

Az $1^n=1$. Ennek maradéka mindig 1. 1 p

A 3^n maradéka attól függ, hogy a hatványkitevő páros, vagy páratlan.

Ha n páros $\Rightarrow$ n=2k. Ekkor $3^n = 3^{2k} = 9^k = (2\ 4+1)^k$, ekkor a maradék 1. 1 p

Ha n páratlan $\Rightarrow$ n=2k+1. Ekkor $3^n = 3^{2k+1} = 3\ 9^k= 3\ (2\ 4+1)^k$, a maradék 3 1=3. 1 p

Az oszthatóság azonosságai miatt az összeg tagjainak osztási maradéka összeadódik. 1 p

Végeredményben:

ha az n páros ($n\geq2$), a vizsgált összeg maradékai 1+0+1+0= 2, 1 p

ha n páratlan ($n\geq2$), a maradékok 1+0+3+0=4 (vagyis osztható 4-gyel). 1 p

Összesen: **9 pont**

2.) Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok körében!

$$(x+3)^{x^2-3x-4}=1$$

$a^b = 1$ csak akkor teljesül, ha vagy *a)* a hatványalap = 1 vagy 1 p

b) a kitevő =0 (és az alap nem 0) vagy 1 p

c) a hatványalap = -1 páros kitevőjű hatványon. 1+1 p

a) x+3 =1 $\Rightarrow$ x = -2; 1 p

b) x^2-3x-4=0 $\Rightarrow$ x = 4; x = -1; (az alap egyik esetben sem 0) 1 p

c) x+3 = -1 $\Rightarrow$ x = -4, (ekkor a kitevő $(-4)^2+12-4 = 24$, azaz páros). 1 p

A feladatnak négy valós megoldása van $x_1 = -2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$; $x_4 = -4$. 1 p

Összesen: **8 pont**

3.) Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első n elemének összegét jelölje S, az első n elem reciprokának összegét jelölje R. Fejezd ki az első n elem szorzatát az S-sel, R-rel és n-nel.

A mértani sorozat tagjai: $a_1; a_1 \cdot q; a_1 \cdot q^2; a_1 \cdot q^3; \ldots a_1 \cdot q^{n-1};$

Ha $q \neq 1$ *akkor* $S = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ 1 p

Az elemek reciprokai: $\dfrac{1}{a_1}; \dfrac{1}{a_1 \cdot q}; \dfrac{1}{a_1 \cdot q^2}; \ldots \dfrac{1}{a_1 \cdot q^{n-1}}$; mely szintén mértani sorozat. 1 p

Az első tag $\dfrac{1}{a_1}$, a hányados pedig $\dfrac{1}{q}$. **(1 p)** Az összeg: $R = \dfrac{1}{a_1} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{q} - 1}$. 1 p

$$R = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\dfrac{1}{q^n} - 1}{\dfrac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\dfrac{1-q^n}{q^n}}{\dfrac{1-q}{q}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{(1-q^n) \cdot q}{(1-q) \cdot q^n} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot q^{1-n} \cdot \frac{a_1}{a_1} = \frac{S}{a_1^2 \cdot q^{n-1}}$$

átalakításokra: **(1 p)** + 1 p

A fenti összefüggésből következik: $a_1^2 \cdot q^{n-1} = \dfrac{S}{R}$ 1 p

Az első n tag szorzata:

$$P = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \ldots (a_1 \cdot q^{n-1}) = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots(n-1)} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} = a_1^{2 \cdot \frac{n}{2}} \cdot q^{(n-1)\frac{n}{2}} = (a_1^2 \cdot q^{n-1})^{\frac{n}{2}}$$

1 p

azaz $P = \left(\dfrac{S}{R}\right)^{\frac{n}{2}}$. 1 p

Ha $q=1$, akkor

$$S = n \cdot a$$

$$R = \frac{n}{a} = \frac{n}{a} \cdot \frac{a}{a} = \frac{n \cdot a}{a^2} = \frac{S}{a^2} \qquad \frac{S}{R} = a^2$$

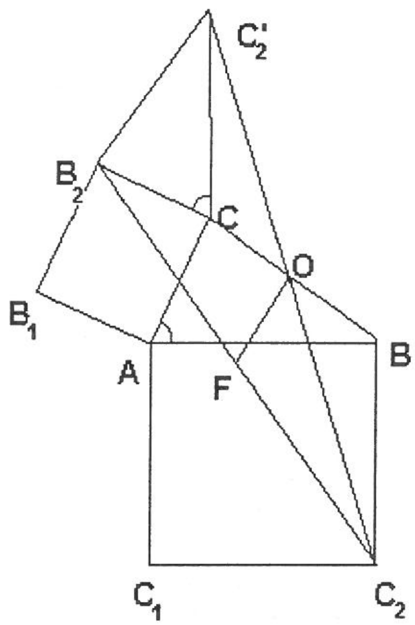
$$P = a^n = (a^2)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{S}{R}\right)^{\frac{n}{2}}$$

az átalakításokra soronként 1+1+1 pont

Összesen: **12 pont**

4.) Az ABC háromszög AB és AC oldalai fölé kifelé négyzeteket rajzolunk, csúcspontjaik A, C_1, C_2, B és A, B_1, B_2, C. Bizonyítsuk be, hogy a B_2C_2 szakasz F felezőpontja illeszkedik a BC átmérőjű körre!

A BC átmérőjű kör középpontja O, azaz a szakasz felezőpontja. BC_2 szakaszt O-ra tükrözve CC_2' szakaszt kapjuk.



$AB = BC_2$ (négyzet) 1 p

A feladat helyes értelmezésére (jó ábra) 1 p

$BC_2 = C\,C_2'$ és $BC_2 \parallel C\,C_2'$ (tükrözés) 1 p

$B_2C = AC$ (négyzet) 1 p

CAB szög = $B_2C\,C_2'$ szög (merőleges szárú szögek). 1 p

Fentiekből következik, hogy $ABC\Delta \cong B_2CC_2'\Delta$ 1 p

és ebből $\Rightarrow BC = B_2C_2'$. 1 p

De FO a $B_2C_2C_2'\Delta$ középvonala 1 p

ezért $FO = ½\, B_2C_2' = ½\, BC$. 1 p

Tehát CO=FO=BO, azaz B,C és F az O középpontú körön helyezkedik el. 1 p

Összesen: **10 pont**

5.) A k_1 kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$; a k_2 kör egyenlete: $(x-7)^2 + (y-14)^2 = 5$.
Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja a k_1 és k_2 középpontját összekötő egyenesen van, és amelyet a k_1 és k_2 körök belülről érintenek.!

Az $(x-2)^2+(y-4)^2=20$ egyenletű k_1 kör középpontjának koordinátái $S_1(2;4)$. 1 p

Az $(x-7)^2+(y-14)^2=5$ egyenletű k_2 kör középpontjának koordinátái $S_2(7;14)$. 1 p

A két középpontot összekötő egyenes egyenlete $y=2x$. 1 p

Mivel a keresett kör középpontja is ezen az egyenesen van, ezért ezen az egyenesen vannak az adott körök és a keresett kör érintési pontjai is. 1 p

A k_1 kör és az összekötő egyenes metszéspontjai $P_1(0;0)$ és $P_2(4;8)$.

(egyenletrendszer felírásra 1 p, végeredményre újabb 1 p)

A k_2 kör és az összekötő egyenes metszéspontjai $P_3(6;12)$ és $P_4(8;16)$.

(egyenletrendszer felírásra 1 p, végeredményre újabb 1 p)

Az adott körök a keresett k kört belülről érintik, ezért k átmérője a P_1P_4 szakasz,

középpontja e szakasz felezőpontja, vagyis a (4;8) koordinátájú S pont, 1 p

és sugara $r = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ 1 p

Így a keresett kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 80.$ 1 p

Összesen: **11 pont**

Minden feladatnak csak egy –több, nem áthúzott próbálkozás esetén az utolsó – megoldását pontozzuk! A közölt megoldásoktól eltérő helyes gondolatmeneteket is a teljesség foka szerint pontozzuk!