Bolyai János Matematika Verseny feladatai

2001-2002. tanév

12. évfolyam

1. Az ABCD téglalap egyik oldalegyenesének egyenlete y = 3x. Átlói az M (12;6) pontban metszik egymást. Az AC átló párhuzamos az x tengellyel. Határozza meg a téglalap csúcsainak koordinátáit és a téglalap területét!

   14pont

2. Egy háromszög szögei α, β, γ. Mutassa meg, hogy ha $2\cdot\cos\alpha=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, akkora háromszög egyenlőszárú!

   10pont

3. Mely α értékekre van az

   12pont

   $$x^2-2(\cos\alpha-\sin\alpha)x+1+\sin\alpha=0$$

   másodfokú egyenletnek két egyenlő valós gyöke?

4. A $\lg 2$; $\lg 2^x$; $\lg(2^x+4)$ számok ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymás után következő elemei. Írja fel a számtani sorozat elemeit!

   15pont

5. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget, amelyben x és y is egész szám

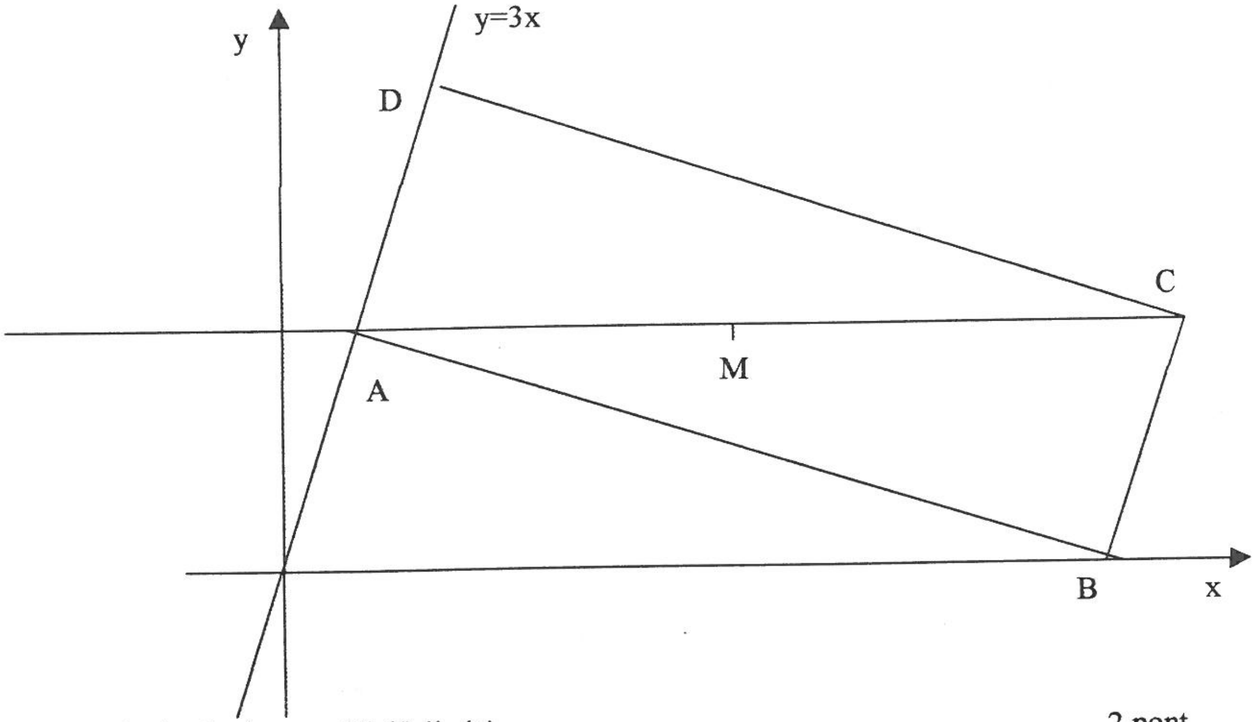
   20pont

   $$\log_{\frac{x^2+y^2}{4}}\frac{|y|}{2}\geq 1 \quad !$$

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKA VERSENY javítási útmutatója
2001/2002. tanév

12. évfolyam

1.



Készítsük el a megfelelő ábrát!	2 pont
A csúcspont illeszkedik az y = 6 egyenletű AC átlóra	1 pont
és az y = 3x egyenesre,	1 pont
ezért A(2; 6)	1 pont
M pont az AC átló felezőpontja $M = F_{AC}$ C(22; 6)	1 pont

A C pontból az y = 3x egyenletű oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenes meredeksége $m = -\frac{1}{3}$, egyenlete — 1 pont

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 22)$$

$$x + 3y = 40 \qquad \text{1 pont}$$

D koordinátái a két egyenes egyenletéből álló

$$x + 3y = 40$$

$$y = 3x$$

egyenletrendszer megoldása D (4; 12) — 2 pont

$M = F_{BD}$ B(20;0) — 1 pont

A téglalap csúcsai A(2; 6), B(20;0) C(22; 6) D(4; 12)

A terület meghatározásához az oldalakat a két pont távolságának meghatározására szolgáló képlettel számítva

$$AB = \sqrt{360} \qquad \text{1 pont}$$

$$AD = \sqrt{40} \qquad \text{1 pont}$$

$$T = \sqrt{360} \cdot \sqrt{40} = 120 \qquad \text{1 pont}$$

14 pont

2. A háromszög belső szögeinek összege 180°.

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ 3 pont

Rendezve az egyenlőséget

$2\cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin\gamma$ 2 pont

$2\cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$0 = \sin(\alpha - \beta)$ 3 pont

$\alpha - \beta = k \cdot \pi$ $\quad k = 0$

$\alpha - \beta = 0$

$\alpha = \beta$ A háromszög egyenlőszárú. 2 pont

10 pont

3. A másodfokú egyenletnek akkor van két egyenlő gyöke, ha D = 0 1 pont

$D = [-2(\cos\alpha - \sin\alpha]^2 - 4(1 + \sin\alpha) = 0$ 1 pont

$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha - 1 - \sin\alpha = 0$ 2 pont

felhasználva, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, majd $\sin\alpha$-t kiemelve

$\sin\alpha \cdot (2\cos\alpha + 1) = 0$ 3 pont

Ez akkor teljesül, ha

$\sin\alpha = 0$

$\alpha_1 = k \cdot \pi \quad (k \in Z)$ 2 pont

vagy $2 \cdot \cos\alpha + 1 = 0$

$$\alpha_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\alpha_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \in Z)$$ 2 pont

Ellenőrizhető, hogy mindhárom gyöksorozat kielégíti a feltételi egyenletet és akkor az eredeti egyenletnek valóban két egyenlő gyöke van. 1 pont

12 pont

4. A feltétel alapján

$$\lg 2^x = \frac{\lg 2 + \lg(2^x + 4)}{2}$$ 2 pont

$$2\lg 2^x = \lg 2 + \lg(2^x + 4)$$ 1 pont

A logaritmus azonosságait alkalmazva

$$\lg(2 \cdot 2^x + 8) = \lg 2^{2x}$$ 2 pont

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt

$$2 \cdot 2^x + 8 = 2^{2x}$$ 1 pont

rendezve

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$$ 2 pont

2^x-re nézve másodfokú egyenlet gyökei

$2^x = 4 \qquad 2^x = -2$ 4 pont

Az utóbbi nem jöhet szóba, így

$2^x = 4$ egyenletből $x = 2$ 2 pont

A keresett számtani sorozat elemei

lg2; 2·lg2; 3·lg2 1 pont

15 pont

5. A kifejezésnek értelme van, ha $y \neq 0$ és $x^2 + y^2 \neq 4$ 1 pont
A logaritmus alapja miatt két esetet kell vizsgálni

$0 < \frac{x^2+y^2}{4} < 1$ azaz $0 < x^2 + y^2 < 4$ 2 pont

Ilyen tulajdonságú pontok az origó középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében helyezkednek el, kivéve a kör középpontját.

Ekkor $0 < \frac{|y|}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{4}$, azaz $0 \leq x^2 + y^2 - 2|y|$ 1 pont

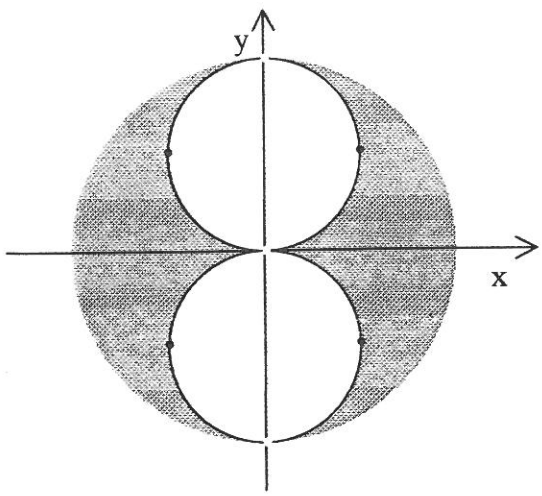
$1 \leq x^2 + (|y|-1)^2$ 2 pont

ha $y > 0$, akkor $1 \leq x^2 + (y-1)^2$

(0; 1) középpontú, 1 egység sugarú körvonal és azon kívüli pontok I. és II. síknegyedbe eső része, 2 pont

ha $y < 0$, akkor $1 \leq x^2 + (y+1)^2$

(0; −1) középpontú, 1 egység sugarú körvonal és azon kívüli pontok III. és IV. síknegyedbe eső részét jellemzi. Mindkét esetben a körvonal is hozzászámít. 2 pont



(1; 1) 1 pont

(-1; 1) 1 pont

(-1; -1) 1 pont

(1; -1) 1 pont

Ha $\frac{x^2+y^2}{4} > 1$ azaz $x^2 + y^2 > 4$ 2 pont

origó középpontú, 2 egység sugarú körön kívüli pontok, a körvonal nem számít hozzá

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leq \frac{|y|}{2}$$

$$x^2 + (|y|-1)^2 \leq 1$$ 2 pont

A kapott egyenlőtlenség az előzőekben már vizsgált két kör belső pontjait jellemzi.
Így nincs olyan pont, ami ezeket egyszerre kielégíti. 2 pont

20 pont