BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY FELADATAI

a 2000/2001. tanévben a

gimnáziumok és szakközépiskolák 12. évfolyama számára

A függvénytáblázaton és a számológépen kívül más könyv illetve segédeszköz nem használható. A feladatok megoldását kellően indokolni kell! Ügyeljünk az áttekinthető külalakra! A verseny időtartama 2 óra 30 perc.

1. Valaki egymás után kétszer fogadott. Az első fogadást megnyerte, és így pénzét bizonyos százalékkal megnövelte. A következő fogadáson az előbbinél 5 %-kal kevesebbet veszített. Így ugyanannyi pénze maradt, mint az első fogadás előtt volt. Hány %-os volt a nyeresége, illetve a vesztesége ?

6 pont

2. Határozd meg a kifejezés értelmezési tartományát:

$$\sqrt{x^4-13x^2+36}+\sqrt{x^2-13x+36}\,.$$

8 pont

3. Egy számsorozat első tagja 2, a második 3, további tagjaira pedig az teljesül, hogy minden tag 1-gyel kisebb, mint két szomszédjának szorzata.
a) Mi a 2000. tag?
b) Mennyi az első 2000 tag összege?
c) Hányadikig kell összeadni a tagokat, hogy az összeg 2000 legyen?

10 pont

4. Az AB átmérőjű, O középpontú kört A-ban belülről érinti a Q középpontú kör. B-ből a belső körhöz húzott érintő érintési pontja C, az AC egyenes E-ben metszi a nagyobb kört Bizonyítsuk be, hogy BE szakasz mértani közepe az AE és EC szakaszoknak!

12 pont

5. Egy 5999 oldalú konvex sokszöget egy csúcsból induló két átlójával három különböző oldalszámú konvex sokszögre bontunk. A keletkező sokszögek belső szögösszegei számtani sorozatot alkotnak. A legnagyobb szögösszeg a legkisebb szögösszegnek egész számú többszöröse. Hány oldalúak a sokszögek?

14 pont

BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY javítási útmutatója a 2000/2001. tanévben a gimnáziumok és szakközépiskolák 12. évfolyama számára

1. Legyen az induló pénzösszeg x, és a nyeremény ennek p %-a.

Az első fogadás utáni pénzösszeg: $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x$ — 2 pont

A második fogadás után: $\left(1-\frac{p-5}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x = x$ — 2 pont

A rendezés után: $p^2-5p-500=0$

$$p_{1,2}=\frac{5\pm 45}{2} \quad \text{és} \quad p>0 \text{ miatt}$$

$p_1 = 25\%$ -os az első fogadás utáni nyereség,
$p_2 = 20$ %-os a második fogadás utáni veszteség. — 2 pont

6 pont

2. $\sqrt{x^4-13x^2+36}+\sqrt{x^2-13x+36}=\sqrt{(x^2-9)\cdot(x^2-4)}+\sqrt{(x-9)\cdot(x-4)}=$
$=\sqrt{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}+\sqrt{(x-4)\cdot(x-9)}$ — 2 pont

Az értelmezési tartományt az
$(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\geq 0$ *és* $(x-4)\cdot(x-9)\geq 0$ — 2 pont
egyenlőtlenség rendszer megoldáshalmaza adja:
$D =]-\infty;-3] \cup [-2;2] \cup [3;4] \cup [9;+\infty[$ — 4 pont

8 pont

3. A számsorozat első hét tagját kiszámolva belátható, hogy a 2, 3, 2, 1, 1 számok periodikusan ismétlődnek a sorozatban. — 3 pont

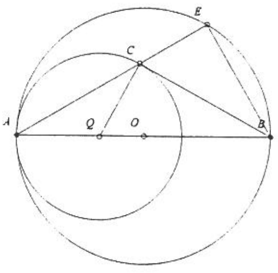
a) $2000 = 400 \cdot 5$, ezért $a_{2000} = 1$ a kétezredik tag. — 2 pont

b) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5= 9$, ezért $S_{2000} = 400 \cdot 9 = 3600$ az első kétezer tag összege — 2 pont

c) $2000 = 222 \cdot 9 + 2 = S_{1110} + 2 = S_{1110} + a_{1111} = S_{1111}$, tehát 1111 tag összege lesz 2000. — 3 pont

10 pont

4. Legyen EAB szög = α . ABE háromszög derékszögű Thalesz tétele miatt,így ABE szög = 90°- α. 2 pont



CQBszög = 2 α a kis körben a kerületi és középponti szögek tétele miatt.BC érintő, ezért QBC háromszög is derékszögű, tehát QBCszög = 90°- 2 α . 2 pont

Így CBE szög = α. 2 pont

.BCE háromszög is derékszögű, így ABE és BCE háromszögek hasonlók megfelelő szögeik egyenlősége miatt. 3 pont

A megfelelő oldalak aránya : $\frac{BE}{CE} = \frac{EA}{BE}$, amiből $BE = \sqrt{AE \cdot EC}$. <u>3 pont</u>

12 pont

5. Ha az n oldalú konvex sokszöget egy átlója mentén két konvex sokszögre bontunk, a keletkező két sokszög csúcsainak összege kettővel több, mint az eredeti sokszögé. Így a keletkező $p < q < r$ oldalú sokszögek oldalszámaira $p + q + r = 5999 + 4$. 4 pont

A szögösszegek számtani sorozatot alkotnak, ezért

$2 \cdot (q-2) \cdot 180° = (p-2) \cdot 180° + (r-2) \cdot 180°$, ebből $2q = p + r$.

A két egyenletből $q = 2001$, illetve $p + r = 4002$ és $r = 4002 - p$. 3 pont

$(r-2) \cdot 180° = k \cdot (p-2) \cdot 180°$ $k \in \mathbf{Z}^+$ miatt

$\frac{r-2}{p-2} = \frac{4000-p}{p-2} = \frac{3998}{p-2} - 1 \in \mathbf{Z}^+$, ha p - 2 osztója a 2 · 1999 = 3998 - nak.

4 pont

p - 2 lehetséges értékei :	1	2	1999
p :	3	4	2001
r :	3999	3998	2001
q :	2001	2001	2001

A feladat feltételeinek eleget tevő sokszögek oldalainak száma 3, 2001, 3999, vagy 4, 2001, 3998 . <u>3 pont</u>

14 pont