Bolyai János Matematika Verseny 1992

Feladatok: 4. osztály

1. Egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. A szögek szinuszainak összege: $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. Mekkorák a szögek? (8p)

2. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} 4^{\left(\frac{x}{y}\right)} &= 32 * 8^{\left(\frac{x}{y}\right)} \\ 3^{\left(\frac{y}{x}\right)} &= 3 * 9^{\left(\frac{1-y}{x}\right)} \end{aligned}\right\}$$

(10p)

3. Bizonyítsa be, hogy az $x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$ polinom osztható $x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$-gyel. (10p)

4. Adja meg a sík azon $P(x;y)$ pontjait, amelyek koordinátáira teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$(x^2+y^2-2y-2)^2 \le 4x^2$$

(12p)

5. Az ABCD konvex négyszög AB oldalát meghosszabbítjuk a B-n túl BP=AB-vel, BC oldalát C-n túl CQ=BC-vel, CD oldalát D-n túl DR=CD-vel és DA oldalát A-n túl AS=AD-vel. A keletkezett PQRS négyszög területe hányszorosa az ABCD négyszög területének? (15p)

Elérhető összesen : 55 pont

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért a pontszám 50 %-a adható.

Bolyai János Matematika Verseny 1992

Javítási útmutató 4. osztály

1\. Legyen $\alpha=\beta-\varepsilon$; $\gamma=\beta+\varepsilon$, ekkor $\beta-\varepsilon+\beta+\beta+\varepsilon=180^\circ \Longrightarrow \beta=60^\circ$ (1p)

$$\sin(60^\circ-\varepsilon)+\sin 60^\circ+\sin(60^\circ+\varepsilon)=\frac{3+\sqrt{3}}{2} \qquad (1p)$$

$$2\sin 60^\circ\cos\varepsilon+\sin 60^\circ=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos\varepsilon+1)=\frac{3+\sqrt{3}}{2} \qquad (2p)$$

$$2\cos\varepsilon+1=\sqrt{3}+1$$

$$\varepsilon=30^\circ\ (\varepsilon<60^\circ) \qquad (2p)$$

$$\alpha=30^\circ;\ \beta=60^\circ;\ \gamma=90^\circ \qquad (1p)$$

ellenőrzés (1p)

Összesen : 8 pont

2\.

$$\left.\begin{aligned} 2^{\frac{2x}{y}} &= 2^{5+\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{y}{x}} &= 3^{1+\frac{2-2y}{x}} \end{aligned}\right\} \qquad (1p)$$

az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt, és rendezés után

$$\left.\begin{aligned} 2x^2-5xy-3y^2&=0 \\ 3y-x&=2 \end{aligned}\right\} \qquad (2p)$$

$$(x-3y)(2x+y)=0$$

$\downarrow$

ez a 2. egyenlet szerint $=-2$ (2p)

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=0 \\ 3y-x&=2 \end{aligned}\right\} \qquad (2p)$$

$$x=-\frac{2}{7};\ y=\frac{4}{7} \qquad (2p)$$

ellenőrzés (2p)

Összesen: 10 pont

3\. Jelöljük a két polinomot B-vel és A-val. Ezek után felírhatjuk, hogy $B-A=$

$=(x^{9999}-x^9)+(x^{8888}-x^8)+(x^{7777}-x^7)+(x^{6666}-x^6)+(x^{5555}-x^5)+$

$(x^{4444}-x^4)+(x^{3333}-x^3)+(x^{2222}-x^2)+(x^{1111}-x)=$ (3p)

$x^9[(x^{10})^{999}-1]+x^8[(x^{10})^{888}-1]+x^7[(x^{10})^{777}-1]+x^6[(x^{10})^{666}-1]+$

$+x^5[(x^{10})^{555}-1]+\ldots+x^2[(x^{10})^{222}-1]+x[(x^{10})^{111}-1]$ (3p)

A zárójelben lévő kifejezések oszthatók $x^{10}-1$-gyel, azaz oszthatók

$$A=\frac{x^{10}-1}{x-1}\text{ -gyel is.} \qquad (3p)$$

Az oszthatósági szabályok miatt, ha B-A osztható A-val, akkor B-nek is oszthatónak kell lennie A-val. (1p)

Összesen: 10 pont

4. Átrendezve $(x^2+y^2-2y-2)^2-4x^2 \le 0$ (1p)

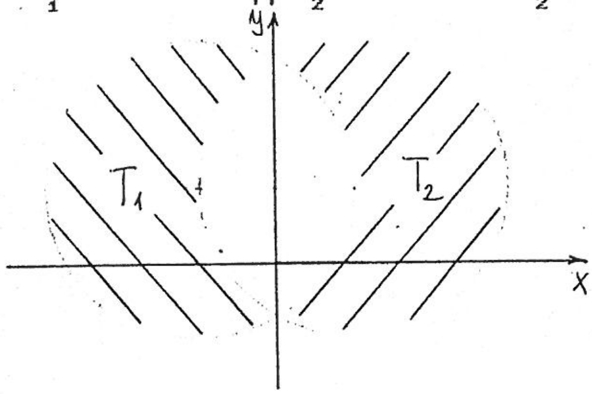
$$(x^2+y^2-2y-2+2x)(x^2+y^2-2y-2-2x) \le 0 \quad (1p)$$

$$\text{I.}\ \left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2y-2+2x \le 0 \\ \text{és } x^2+y^2-2y-2-2x \ge 0 \end{array}\right\} \quad \text{vagy} \quad \text{II.}\ \left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2y-2+2x \ge 0 \\ x^2+y^2-2y-2-2x \le 0 \end{array}\right\} \quad (2p)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x+1)^2+(y-1)^2 \le 4 \\ \text{és } (x-1)^2+(y-1)^2 \ge 4 \end{array}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{array}{l} (x+1)^2+(y-1)^2 \ge 4 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le 4 \end{array}\right\} \quad (4p)$$

k_1-n kívüli $\cap$ k_2-n belüli $= T_2$ (1p)

k_1-n belüli $\cap$ k_2-n kívüli $= T_1$

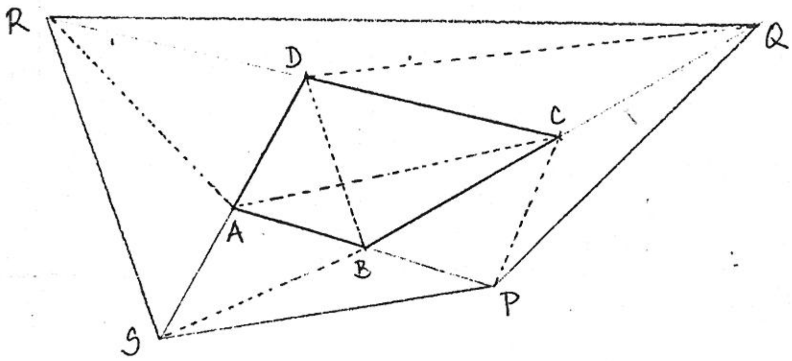


Megoldás: $T_1 \cup T_2$ (1p)

ábráért: (2p)

Összesen: 12 pont

5.



(1p)

BQD háromszögben CD súlyvonal $\Longrightarrow t_{BCD} = t_{CDQ}$ (2p)

CQR háromszögben DQ súlyvonal $\Longrightarrow t_{CQD} = t_{DQR}$ (2p)

$$t_{BCD} = t_{CDQ} = t_{DQR} \quad (1p)$$

$$t_{ADR} = t_{ACD} = t_{ARS} \quad (1p)$$

$$t_{ABS} = t_{ABD} = t_{BPS} \quad (1p)$$

$$t_{BCP} = t_{ABC} = t_{CPQ} \quad (1p)$$

$$t_{PQRS} = T + t_{ABS} + t_{BPS} + t_{BCP} + t_{CQP} + t_{CDQ} + t_{DQR} + t_{ADR} + t_{ARS} = \quad (2p)$$

$$= T + 2\cdot t_{ABD} + 2\cdot t_{ABC} + 2\cdot t_{BCD} + 2\cdot t_{ACD} =$$

$$= T + 2\cdot(\underbrace{t_{ABD} + t_{BCD}}_{T} + \underbrace{t_{ABC} + t_{ACD}}_{T}) = 5\cdot T \quad (4p)$$

Összesen: 15 pont

Elérhető összesen : 55 pont

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért a pontszám 50 %-a adható.