Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1991.

IV. osztály

1./ Húzzuk meg egy téglatest testátlóját. Bizonyítsuk be, hogy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, ha a testátló az élekkel α, β, γ szögeket zár be! 6 pont

2./ Határozza meg az A értékét, ha 8 pont

$$A = \log_{\frac{1}{3}} \log_3 \sqrt[3^n]{\sqrt[3^{n-1}]{\ldots\sqrt[9]{\sqrt[3]{3}}}} \quad !$$

3./ Adott egy háromszög három oldala: a, b, és c. Határozzuk meg annak a háromszögnek a területét, melyet a belső szögfelezők és a megfelelő oldalak metszéspontjai alkotnak! 12 pont

4./ Bizonyítsuk be, hogyha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet valamennyi együtthatója páratlan, akkor az egyenlet gyökei nem racionálisak! 12 pont

5./ Helyezzünk egységélű kockába érintő gömböt! Fektessünk a gömbhöz olyan érintősíkot, mely merőleges az egyik testátlóra. Mekkora a kockából lemetszett gúla térfogata? 12 pont

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért az eredeti pontszám fele adható.

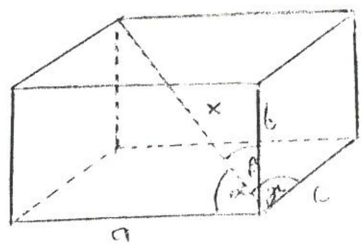
Szombathely, 1991. november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas Megyei Tagozata

Javítási útmutató

IV. osztály

1./



$a = x \cdot \cos\alpha$

$b = x \cdot \cos\beta$

$c = x \cdot \cos\gamma$ 2 p

$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 2 p

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 2 p

6 p

2./ $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3^n}} =$ 2 p

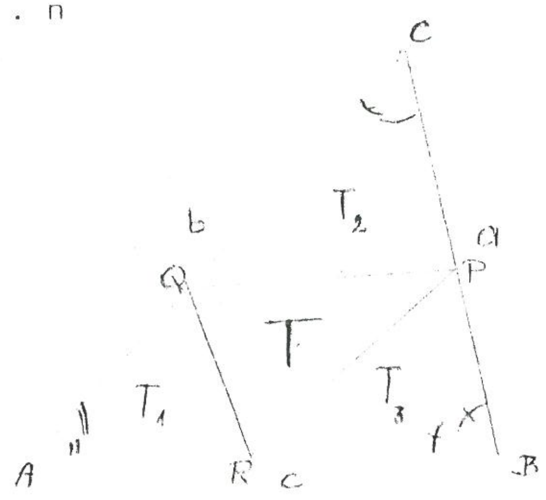
$= \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3^{1+2+\ldots+n}} =$ 2 p

$= \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3} \right)^{\frac{1+n}{2} \cdot n} =$ 2 p

$= \dfrac{1+n}{2} \cdot n$ 2 p

8 p

3./



$T_{PQR_\Delta} = T_{ABC_\Delta} - (T_1 + T_2 + T_3)$ 1 p

A szögfelelző tételből

$$AR = \frac{bc}{a+b} \;;\; RB = \frac{a.c}{a+b} \;;\; AQ = \frac{bc}{a+c}$$

$$QC = \frac{ab}{a+c} \;;\; CP = \frac{ab}{b+c} \;;\; PB = \frac{ac}{b+c}$$ 3 p

Az ABC m_c magasságra és az ARQ m_q magasságára a párhuzamos szelők tételéből következik, hogy:

$$\frac{m_c}{m_q} = \frac{AC}{AQ} = \frac{a+c}{c}$$

$$\text{azaz } m_q = \frac{m_c \, . \, c}{a + c}$$ 2 p

$$\text{Tehát: } 2T_1 = \frac{bc}{a+b} \quad \frac{m_c \, . \, c}{a+c} = \frac{bc.2T_{ABC}}{(a+b)(a+c)}$$

$$T_1 = T_{ABC} \cdot \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$$

$$\text{hasonlóan } T_2 = \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \cdot T_{ABC} \;;\; T_3 = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} . T_{ABC}$$ 3 p

$$T = T_{ABC} \left(1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} \right) =$$

$$= T_{ABC} \, \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$ 2 p

T_{ABC} például a Heron képletből

$$T = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \, . \, \frac{2\ abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$ 1 p

ahol $S = a+b+c$

12 p

4./ Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik egy $\frac{p}{q}$ tovább nem egyszerűsíthető tört, ami a feltételnek megfelel, ahol p és q egész számok és $q \neq 0$ 2 p

$$a \, . \, \frac{p^2}{q^2} + b \, . \, \frac{p}{q} + c = 0 \quad / \, . \, q^2$$

$$ap^2 + bp.q + c.q^2 = 0$$ 2 p

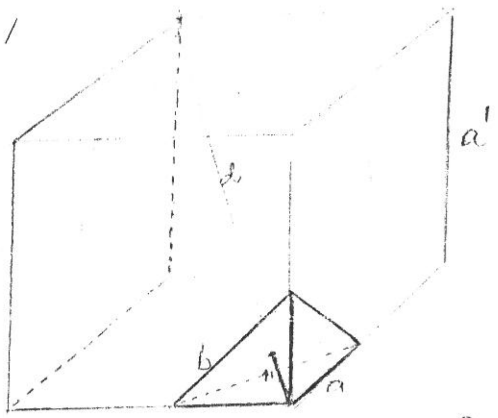
a./ ha p és q páratlan, akkor a baloldal páratlan, a jobboldal páros , ez ellentmondás 2 p b/ ha p és q közül egyik páros, a másik páratlan, akkor a baloldal páratlan, a jobb oldal páros, ez ellentmondás — 2 p

c/ ha p és q is páros, ez ellentmondás azzal, hogy $\frac{p}{q}$ tovább nem egyszerűsíthető. — 2 p

Mivel minden esetben ellentmondásra jutottunk, az állítást bizonyítottuk. — 2 p

$\overline{12 \text{ p}}$

5./



$a' = 1 \qquad d = \sqrt{3}$

$m = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ — 2 p

Az alap szabályos b oldalú Δ, az oldallapok derékszögű egyenlőszárú Δ-ek. — 2 p

$b = a \cdot \sqrt{2} \qquad a^2 = m^2 + \frac{2}{3}a^2$

$3m^2 = a^2$

$b^2 = 6m^2$ — 4 p

$$V = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3} \cdot m}{4 \cdot 3} = \frac{6m^3 \cdot \sqrt{3}}{12} = \frac{3(\sqrt{3}-1)^2 \cdot (\sqrt{3}-1)}{2 \cdot 8} =$$

$$= \frac{18 - 10\sqrt{3}}{16} = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{8} \quad (\sim 0{,}0425)$$ — 4 p

$\overline{12 \text{ p}}$

Összesen: 50 pont