BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY FELADATAI - 1990

IV. osztály

Fogalmazványt nem kell késziteni ! Olvashatóan, szépen, tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani a feladatokat, elkülönitve azokat egymástól.
A szükséges magyarázatokat szöveggel is közölje !

1./ Különböző egész számokból álló számtani sorozatban az első 7 elem négyzetösszege kisebb 500-nál, az első, a harmadik és a hetedik elem mértani sorozatot alkot.
Irja fel a hét számot ! 8 pont

2./ Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \log_x /2 + \sqrt{xy}/ &= 1 + \log_x y \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

10 pont

3./ Legyen ABC és DEF két tetszőleges háromszög. Az ABC háromszög sulypontja S, a DEF háromszög sulypontja T.
Bizonyitsa be, hogy

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3\,\overrightarrow{ST}$$

10 pont

4./ Az y tengellyel párhuzamos tengelyü és felfelé nyiló parabola átmegy az A/5; 4/ ponton és érinti az x tengelyt. Az A pontban a parabolához huzható érintő merőleges a $\vec{v}$ /4; - 1/ vektorra !
Irja fel a parabola egyenletét ! 10 pont

5./ Egy derékszögü háromszög befogói a és b. A derékszöget harmadoló, az a oldalhoz közelebb eső félegyenesnek a háromszögben lévő szakasza h.
Igazolja, hogy

$$\frac{1}{b} + \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{2}{h}$$

12 pont

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért az eredeti pontszám fele adható.

Szombathely, 1990. november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas Megyei Tagozata

Utmutató a versenydolgozatok értékeléséhez

IV. osztály

1./ Ha a számtani sorozat elemeit a_1 és d vagy a_4 és d segitségével felirta	1 p
A négyzetösszegre felirt egyenlőtlenség /1/	1 p
A mértani sorozatos tulajdonság alkalmazása,	1 p
a kapott egyenlet szorzattá alakitása 0-ra rendezve	1 p
$d \neq 0$, mert különböző számok	1 p
$a_1 = 2d$ vagy $a_4 = 5d$ behelyettesitése /1/-be	1 p
$d^2 < \frac{500}{203}$ $\quad d = \pm 1$	1 p
A keresett számok: 2;3;4;5;6;7;8 vagy -2;-3;-4;-5;-6;-7;-8	1 p
	8 p
2./ A feltételek felirása	1 p
Az első egyenlet jobb oldalát szorzat x alapu logaritmusaként felirva	2 p
A hatványértékek egyenlőségét felirva és a $\sqrt{xy} = a$ -ban másodfoku egyenletet felismerve	2 p
$a = 2$ helyes megoldás kiválasztása	1 p
$xy = 4$ és $x + y = 5$ egyenletrendszer megoldása	2 p
$x = 4$ és $y = 1$ helyes megoldás kiválasztása	1 p
Ellenőrzés	1 p
	10 p
3./ A tér tetszőleges O pontjából a csucsokba irányitott vektorok felvétele	2 p
Az AD; BE; CF; ST vektorok felirása a helyvektorok különbségeként	2 p
A sulypontba mutató vektorokat kifejezve a csucsokba mutató vektorokkal	3 p
Az AD; BE; CF vektorok helyett a különbségvektorokat behelyettesitve és alkalmasan csoportositva, kiemelve, a sulypontra vonatkozó összefüggéseket is alkalmazva kapjuk a bizonyitandót.	3 p
	10 p

4./ A parabola egyenlete: $y = a(x-u)^2$ — 1 p

Az egyenes egyenlete: $y = 4x - 16$ — 2 p

A felirtakból egy x-ben másodfoku egyenlet megoldásait a $D = 0$ feltétellel keresve, — 2 p

ebből $a = \frac{1}{4 - u}$ — 2 p

A parabola egyenletébe visszahelyettesitve

$u = 3$ és $a = 1$ — 2 p

A parabola egyenlete $y = (x - 3)^2$ — 1 p

10 p

5./ A derékszögü háromszög derékszögü csucsa C, legyen a $h = CD$

BDC szög $= 60^\circ +$ CAB szög

ADC szög $= 120^\circ -$ CAB szög — 3 p

BCD háromszögre felirt szinusztétel és

ACD háromszögre felirt szinusztétel — 3 p

Az addiciós tételek alkalmazása és nevezetes szögek behelyettesitése — 2 p

A felirt egyenleteket alkalmas módon szorozva, összeadva és átrendezve adódik a bizonyitandó — 4 p

12 p

Szombathely, 1990 november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas Megyei Tagozata