BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY - 1988. november

IV. osztály

1. Egy háromszögalapú gúla oldalélei 3, 4 és 5 cm, és páronként merőlegesek. Mekkora a felszíne és a térfogata?

/7 pont/

2. Bizonyítsd be, hogy azok a derékszögű háromszögek, amelyeknek az oldalai számtani sorozatot alkotnak, hasonlóak egymáshoz!

/7 pont/

3. Adott a síkban 11 egyenes, amelyek között nincsenek párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy található köztük két olyan egyenes, amelyek 17^{o}-nál kisebb szöget zárnak be!

/8 pont/

4. Határozd meg az $y=x^2$ parabola azon húrjának az egyenletét, amelyet a $P(1;5)$ pont felez!

/10 pont/

5. Legyen a és b egy derékszögű háromszög befogóinak, c pedig az átfogónak a mérőszáma. Bizonyítsuk be, hogy a $c^2 - ab$ alapterületű és $a+b$ magasságú hasáb térfogata mindig kisebb, mint a c élű kocka térfogata?

/11 pont/

6. Melyek azok az x,y számpárok, amelyekre teljesül a

$$3 \sin x - 4 \cos x = 4 y^2 + 4 y + 6$$ egyenlőség?

/16 pont/

BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY - 1988. november

Megoldások

IV. osztály

1. Az oldallapok területe 6, 7,5 , 10 cm^2 1 pont

az alapélek a Pitagorasz tétellel 5 ,$\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$ cm /5,83 6,40/ 1 pont

az alaplap területe pl. Heron képlettel közelítőleg 13,86 cm^2 3 pont

a felszín 37,36 cm^2 és a térfogat 10 cm^3 közelítőleg 2 pont

összesen 7 pont

2. Legyenek a befogók a-d , a , az átfogó a+d 1 pont

$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$ 1 pont

Ebből a=4d adódik 2 pont

az oldalak 3d , 4d , 5d 1 pont

tehát az oldalak aránya állandó 2 pont

összesen 7 pont

3. A sík egy pontján át az egyenesekkel párhuzamosokat rajzolunk. Ezek a síkot 22 szögtartományra bontják. Ha ezek valamennyien nagyobbak vagy egyenlőek 17^0-nál, akkor összegük nagyobb vagy egyenlő, mint $22\cdot17^0= 374^0 > 360^0$, ami nem lehetséges.

A helyes megoldásra összesen 8 pont

4. A húr végpontjai legyenek $A(a;a^2)$ és $B(b;b^2)$ 2 pont

$(a+b)/2=1$ és $(a^2+b^2)/2=5$ 3 pont

megoldva: a=3 és b=-1 vagy a=-1 és b=3 3 pont

A húr végpontjai: (-1;1) és (3;9) pontok 1 pont

A húr egyenlete $y=2x+3$ 1 pont

összesen 10 pont

5. $(a+b)(c^2-ab)=(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 4 pont

mivel $a^2+b^2=c^2$, ezért $a^2c+b^2c=c^3$ 5 pont

így $a^2a+b^2b<a^2c+b^2c=c^3$ 2 pont

összesen 11 pont

6. Az egyenlet jobb oldala $(2y+1)^2+5$ 3 pont

Az egyenlet bal oldala 5 (3/5 sinx - 4/5 cosx) 3 pont

Létezik olyan z szög, melyre cos(z)=3/5 és sin(z)=4/5

legyen z hegyesszög például, ekkor $z\approx0,92729..$ 2 pont

Így a bal oldal: 5 sin(x-z) 2 pont

A két oldal értékkészletének egyetlen közös eleme az 5 3 pont

sin(x-z)=1 tehát $x=z+\pi/2 + 2k\pi$ 2 pont

$y=-1/2$ 1 pont

összesen 16 pont