Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1987-ben

IV. osztály

1. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 28 . Ha a második tagból elveszünk 1-et, a harmadikból 6-ot, akkor egy számtani sorozat három egymás utáni tagját kapjuk. Irja fel a mértani sorozat első három tagját!

/6 pont/

2. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\lg /x+10/ + \frac{1}{2} \cdot \lg x^2 = 2 - \lg 4$$

/8 pont/

3. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái:

A /-2; 0/, B /2; 0/, C /0; 6/

A koordináta-rendszer sikjában mi azon 'P' pontok halmaza, amelyekre $PA^2 + PB^2 + PC^2 = k^2$, ahol 'k' valós szám?

/8 pont/

4. Igazolja, hogy ha az ABC háromszögekben 2a=b+c és $2\alpha = \beta + \gamma$, akkor a háromszög egyenlő oldalú!

/8 pont/

5. Igazolja, hogy 'n' darab egyenes legfeljebb

$$\frac{n^2 + n + 2}{2}$$ részre osztja a síkot!

/8 pont/

Utmutató a versenydolgozatok értékeléséhez

IV. osztály

1. Jelölje a-val a mértani sorozat első tagját, q-val a hányadosát. Ekkor $a+aq+aq^2=28$ és

$$aq-1=\frac{a+aq^2-6}{2}$$ 2 p

Innen $q_1 = 2$ $a_1 = 4$

$q_2 = \frac{1}{2}$ $a_1' = 16$ 3 p

A mértani sorozat első három tagja: 4; 8; 16; ill.
16; 8; 4 1 p

6 p

2. Az értelmezési tartomány megállapításáért 2 p

a/ ha $-10 < x < 0$, akkor a
$\lg/x+10/ + \lg/-x/ = 2-\lg 4$ egyenlethez jutunk,
amelynek $x=-5$ az egyetlen megoldása. 3 p

b/ ha $x > 0$, akkor $\lg/x+10/ + \lg x = 2 - \lg 4$ és
ennek $x=-5+5\sqrt{2}$ a megoldása; $x = -5-5\sqrt{2}$ pedig
nincs benne az értelmezési tartományban.

Az eredeti egyenlet megoldásai: $x=-5$ ill. $x=-5+5\sqrt{2}$ 3 p

8 p

3. A két pont távolsága képlet alkalmazása után az
$x^2+/y-2/^2=\frac{1}{3}/k^2-32/$ összefüggést kapjuk. 3 p

Ha $|k| > 4\sqrt{2}$, akkor a keresett ponthalmaz a /0; 2/
középpontú $r = \sqrt{\frac{1}{3}/k^2-32/}$ sugarú kör. 3 p

Ha $|k| = 4\sqrt{2}$, akkor a /0; 2/ pont, 1 p

ha $|k| < 4\sqrt{2}$, akkor a ponthalmaz üres halmaz. 1 p

8 p

4. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ sinustételből adódik 2 p

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b+c}{\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{2a}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{a}{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$ 3 p

Innen $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 1$, ahonnan $\beta = \gamma$ 2 p

Mivel $2\alpha = \beta + \gamma$, ezért $\alpha = \beta = \gamma$, tehát a háromszög egyenlő oldalú. 1 p

8 p

5. Első módszer: teljes indukcióval.

Második módszer:

Jelöljük t_n-nel az n egyenes által létrehozott maximális síkrészek /tartományok/ számát.

$t_1 = 2 = 1+1$; $t_2 = t_1 + 2$; $t_3 = t_2 + 3$; ...

$t_n = t_{n-1} + n$. Indoklás: A tartományok száma akkor a legnagyobb, ha az n -edik egyenest metszi mindegyik előzőleg felvett egyenes. Ez $n-1$ metszéspont, ezek n részre osztják az n -edik egyenest, mindegyik rész külön síktartományban van, azt kettéosztja, és igy az előző tartományok számán felül n darab uj tartományt hoz létre. Igy legfeljebb

$$t_n = /1+1/ + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = 1 + \frac{/1+n/\ n}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n + 2}{2}$$ tartomány jön létre. 8 p

8 p

Ha a tanuló az állítást az $n = 1;\ 2;\ 3;$ esetekre igazolja, 2 pont adható.