

# 2012. évi Bolyai János Megyei Matematikaverseny

## 11. osztály

1. Mely  $p$  és  $q$  pozitív prímszámok esetén teljesül, hogy  $p^3 - 2q^2 = 27$  ?
2. Egy háromszög beírt körének középpontja az egyik szögfelezőt 1:3, a másikat pedig 2:3 arányban osztja. Számítsuk ki a háromszög oldalainak arányát!
3. Adott a következő paraméteres másodfokú egyenlet, ahol  $p$  valós paraméter:

$$x^2 + px + p + 75 = 0$$

a) Mekkora lehet  $p$  értéke, ha tudjuk, hogy a két valós gyök köbeinek összege  $3p^2$ -tel egyenlő?

b) Jelölje  $x_1$  és  $x_2$  a fenti paraméteres másodfokú egyenlet valós gyökeit! Igazoljuk hogy az alábbi paraméteres másodfokú egyenlet egyik gyöke egyenlő  $3x_1 + x_2 + 1$  -gyel!

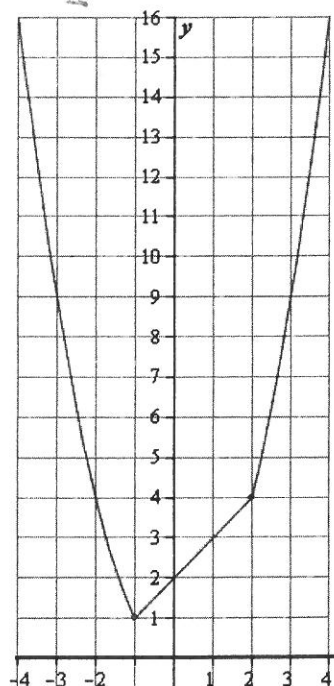
$$y^2 + (4p - 2)y + 3p^2 + 301 = 0$$

4. Béla bácsi lovakat tart. Egy  $256 \text{ m}^2$  területű téglalap alakú területet kerített körül nekik. A kerítést kétféle kerítéselemből készítette el. Egyik fajta oldalát 3 rövidebb és 4 hosszabb kerítéselemből állította össze, míg a másikat 12 rövidebb és 7 hosszabb kerítéselemből. Béla bácsi nagyobb területet szeretne a lovaknak, ezért szétszereli a kerítést, s a belőle kikerülő összes kerítéselem felhasználásával egy más méretű téglalapot kerít körül. Ennek egyik fajta oldalát 5 rövidebb és 6 hosszabb kerítéselem alkotja. A területe  $312 \text{ m}^2$  lett. Hány centiméter hosszúak a rövidebb kerítéselemek?
5. a) Vezesse vissza egyszerűbb függvényekre, majd ábrázolja a  $[-5; 3]$  intervallumon az alábbi függvény grafikonját!

$$f(x) = |x^2 + 2x - 3| - x^2$$

b) Keressen a fentihez hasonló abszolútértékes függvényszabályt az ábrán látható grafikonhoz!

(A grafikon első és harmadik része egyaránt az  $y=x^2$  függvény grafikonjának része, a két jelzett töréspont közötti rész pedig lineáris.)



*Mindegyik feladat 20 pontot ér.*