# Bolyai János Matematika Verseny feladatai

2001-2002. tanév

## 11. évfolyam

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! **12pont**

   $$|x^2+3x-4|+3x+9=0$$

2. A „p" paraméter milyen értéke mellett lesz az **17pont**

   $$x^2+(3p-11)x+2p^2-19p+40=0$$

   egyenletben a valós gyökök négyzetének összege minimális?

3. Legyen ABCD trapéz (AB $\|$ CD) érintőnégyszög! Beírt köréhez az átellenes **11pont** A és C csúcsból húzott érintőszakaszok hossza legyen u és v. Igazolja, hogy $u\cdot\overline{CD}=v\cdot\overline{AB}$ !

4. Egy hajóskapitány és a hajója együttvéve 63 évesek. Amikor a kapitány kétszer annyi idős lesz, mint a hajó most, akkor a hajó éppen háromszor annyi idős lesz, mint amennyi a kapitány volt akkor, amikor a hajó kora években kifejezve négyzetgyöke volt a kapitány mostani életkorának. Hány éves a kapitány? **14pont**

5. Határozza meg számológép használata nélkül a következő összeg pontos értékét! **14pont**

   $$\lg(2\cdot \mathrm{tg}1°)+\lg(2^3\cdot \mathrm{tg}3°)+\lg(2^5\cdot \mathrm{tg}5°)+\ldots+\lg(2^{89}\cdot \mathrm{tg}89°)$$

**BOLYAI JÁNOS MATEMATIKA VERSENY javítási útmutatója**
2001/2002. tanév

## 11. évfolyam

1. Ha x∈] -4; ∞ [ ∪ [ 1; ∞ [ , akkor

$x^2 + 3x - 4 \geq 0$ — 3 pont

Az egyenlet $x^2 + 6x + 5 = 0$, melynek gyökei –1; -5. — 2 pont

Az intervallumba a –5 esik.

Ha x ∈] -4; 1 [, akkor $x^2 + 3x - 4 < 0$ — 3 pont

Az egyenlet $-x^2 + 13 = 0$, melynek gyökei $\pm\sqrt{13}$ . — 2 pont

Az intervallulba a $-\sqrt{13}$ esik

Az egyenlet gyökei: – 5; $-\sqrt{13}$. — 2 pont

**12 pont**

2. Akkor van valós gyök, ha D ≥ 0 — 1 pont

$(3p-11)^2 - 4\cdot(2p^2 - 19p + 40) \geq 0$ — 1 pont

$p^2 + 10p - 39 \geq 0$ — 1 pont

zérushelyek p = – 13; p = 3. — 2 pont

D ≥ 0, ha p ≤ – 13 vagy 3 ≤ p. — 2 pont

Vagyis ezekre a p értékekre valósak az eredeti másodfokú egyenlet gyökei.
A gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket felhasználva

$x_1 + x_2 = -(3p-11)$

$x_1 \cdot x_2 = 2p^2 - 19p + 40$ — 1 pont

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5p^2 - 28p + 41$ — 2 pont

$f(p) = 5p^2 - 28p + 41 = 5\cdot\left(p - \frac{14}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}$ másodfokú függvény — 2 pont

Ez akkor minimális, ha $p = \frac{14}{5}$. — 1 pont

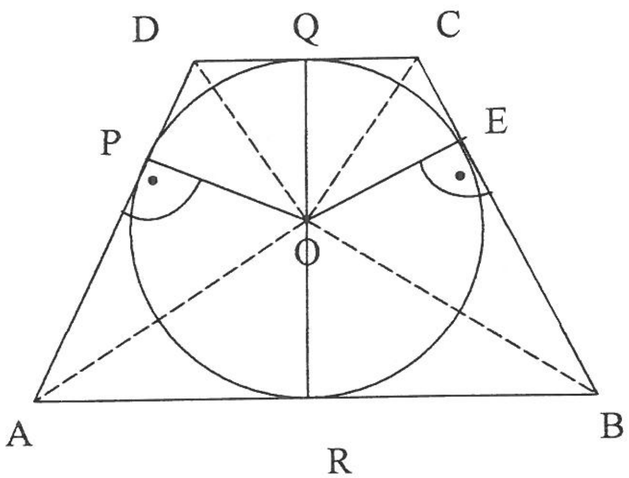
A p ilyen értékeire azonban a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, ezért az f(p) a legkisebb értéket a p≤-13; 3 ≤ p intervallum valamelyikének a végpontjában veszi fel, mert a másodfokú tag együtthatója pozitív. — 1 pont, 1 pont

f(– 13) = 1250
f(3) = 2 — 1 pont

Ezért a gyökök f(p)-vel jelölt négyzetösszege p = 3 esetén minimális. — 1 pont

**17 pont**

3.




Külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségéből, az ábra jelléseit felhasználva

BR = BE = AB – u

DQ = DP = CD – v — 1 pont

a trapéz ugyanazon szárán fekvő szögeinek összege

$BAD\angle + CDA\angle = 180°$ — 2 pont

AO; DO szögfelezők, ezért

$DAO\angle + ADO\angle = 90°$ — 1 pont

Így az $AOD_{\Delta}$ harmadik szöge $AOD\angle = 90°$ — 1 pont

Hasonlóan látható be, hogy $BOC\angle = 90°$ — 1 pont

AOD és BOC derékszögű háromszögben a magasságtételből

$r^2 = AP \cdot PD = BE \cdot EC$ — 2 pont

$u \cdot (CD - v) = (AB - u) \cdot v$ — 1 pont

A műveletek elvégzése után adódik $u \cdot CD = v \cdot AB$ állítás. — 1 pont

**11 pont**

4. A hajó életkora h, a kapitányé k.

$h + k = 63$ — 1 pont

$h - \sqrt{k}$ évvel ezelőtt volt a hajó $\sqrt{k}$ éves, a kapitány $k - \left(h - \sqrt{k}\right)$ éves. — 2 pont

Így $2(63 - k) - k = 3\left\{k - \left[(63 - k) - \sqrt{k}\right]\right\} - (63 - k)$ — 4 pont

Rendezve $10k + 3\sqrt{k} - 378 = 0$ — 4 pont

$k_1 = 36$ és $k_2 = -\dfrac{113}{10}$ a feladat szempontjából hamis. — 1 pont

A kapitány 36 éves. — 2 pont

**14 pont**

5. A logaritmus azonosságait felhasználva:

$\lg 2 + \lg \operatorname{tg} 1° + 3 \cdot \lg 2 + \lg \operatorname{tg} 3° + \ldots + 89 \lg 2 + \operatorname{tg} 89° =$ 1 pont

$= (1 + 3 + \ldots + 89) \cdot \lg 2 + (\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 3° + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89°)$. 2 pont

Mivel $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} (90° - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, ezért:

$\lg \operatorname{tg} 1° + \lg \operatorname{tg} 3° + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89° =$ 4 pont

$= \lg (\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 3° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 89°) =$ 1 pont

$= \lg [(\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 89°)(\operatorname{tg} 3° \cdot \operatorname{tg} 87°) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg} 43° \cdot \operatorname{tg} 47°)(\operatorname{tg} 45°)] = \lg 1 = 0$. 2 pont

Tudjuk, hogy $1 + 3 + \ldots + 89 = \frac{1+89}{2} \cdot 45 = 2025$, 3 pont

Így a kifejezés értéke: $2015 \cdot \lg 2$. 1 pont

**14 pont**