# BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY FELADATAI

## a 2000/2001. tanévben a

## gimnáziumok és szakközépiskolák 11. évfolyama számára

*A függvénytáblázaton és a számológépen kívül más könyv illetve segédeszköz nem használható. A feladatok megoldását kellően indokolni kell! Ügyeljünk az áttekinthető külalakra! A verseny időtartama 2 óra 30 perc.*

1. Az $\frac{x+1}{x^2+1}\left(x \in \Re\right)$ tört értéke mely egész számokkal lehet egyenlő? Az $x$ valós szám milyen értékei esetén veszi fel a tört ezeket az egész értékeket?

8 pont

2. Oldd meg a következő egyenletrendszert!

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2}$$
$$x^2y+xy^2=-2$$

8 pont

3. Az ABCD trapéz párhuzamos oldalai: AD = 16 és BC = 9. A BC oldal meghosszabbításán van egy olyan M pont, amelyre CM = 3,2. Milyen arányban osztja a trapéz területét az AM egyenes?

10 pont

4. 2000 különböző természetes szám összege 3 999 998. Mutasd meg, hogy a számok között van legalább két páros szám !

12 pont

5. Melyek azok a b valós számok, amelyekre a $\left(b^2+1\right)x^2+\left(b+1\right)x-2=0$ egyenletnek pontosan egyik gyöke esik a (0 ; 1) intervallumba?

12 pont

# BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY javítási útmutatója a 2000/2001. tanévben a gimnáziumok és szakközépiskolák 11. évfolyama számára

**1. feladat**

Jelöljük a tört értékét n-nel és határozzuk meg, hogy n mely értékeihez tartozik valós x érték,tehát oldjuk meg a paraméteres egyenletet x-re!

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4n-4n^2}}{2n}$$ 2 pont

A kifejezés x-re akkor ad valós értéket, ha a négyzetgyök alatti kifejezés nem negatív,tehát ha fennáll az

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \le n \le \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$ 2 pont

Mivel n csak egész szám lehet, ezért n = 0 és n = 1 a tört két lehetséges értéke. 2 pont

Az n = 0 -hoz az x -re kapott képlet nem használható, az eredeti törtből x = -1 adódik. 1 pont

Az n = 1- hez az x = 0 és x = 1 tartozik. 1 pont

**8 pont**

**2. feladat**

Az $x+y=a, xy=b$ behelyettesítéssel: 1 pont

$a^2+a-2=0$, így 1 pont

$a_1=1, a_2=-2, b_1=-2, b_2=1$ 1 pont

Ha $x+y=1$ és $xy=-2$, akkor 1 pont

$x_1=2, y_1=-1$, vagy $x_2=-1, y_2=2$ 2 pont

Ha $x+y=-2$ és $xy=1$, akkor 1 pont

$x_3=-1, y_3=-1$. 1 pont

**8 pont**

**3.feladat**

Jelöljük az AM és CD egyenesek metszéspontját P-vel, a trapéz magasságát $m$-mel.

A trapéz területe: $12{,}5 \cdot m$ 1 pont

Az APD háromszög hasonló az MPC háromszöghöz, a hasonlóság aránya AD : CM = 5 : 1. Ezért a két háromszög P-ből húzható magasságának az aránya is 5 : 1 , ezek összege $m$, ezért az APD háromszögben az AD-hez tartozó magasság $\frac{5}{6}m$ 3 pont

Az APD háromszög területe: $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{5}{6}m = \frac{20m}{3}$ 2 pont

AZ ABCD trapéz területe: $t - \frac{20m}{3} = \frac{35m}{6}$ 2 pont

Ebből a keresett arány 8 : 7 2 pont

**4. feladat**

Számítsuk ki a 2000 legkisebb páratlan természetes szám összegét:
$1000 \cdot 4000 = 4\,000\,000$

Még többet kapnánk, ha nem a lehető legkisebb pozitív páratlan számokat adnánk össze. 3 pont

Tehát az összeg tagjai nem lehetnek mind páratlanok. 3 pont

Az sem lehet, hogy egy páros, a többi páratlan, mert ekkor az összeg páratlan lenne. 3 pont

Az összeg tagjai közt ezért lennie kell legalább két páros számnak. 3 pont

**12 pont**

**5. feladat**

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D=(b+1)^2+8(b^2+1)$ mindig pozitív, ezért az egyenletnek két különböző valós gyöke van. 2 pont

A gyökök szorzata $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{2}{b^2+1} < 0$, tehát a gyökök ellenkező előjelűek. 2 pont

Így a (0 ; 1) intervallumban akkor van zérushelye az $f(x)=(b^2+1)x^2+(b+1)x-2$ másodfokú függvénynek, ha az $f(0)$ és $f(1)$ helyettesítési értékek különböző előjelűek. 4 pont

Mivel $f(0)=-2$, ezért $f(1)>0$ kell legyen, 2 pont

vagyis $b^2+b>0$, ennek megoldása: $b<-1$ vagy $b>0$. 2 pont

**12 pont**