Bolyai János Matematika Verseny feladatai

11. évfolyam

1998.október 29.

1. Bizonyítsuk be, hogy az ABCD téglalap síkjában a téglalapon kívül felvett P pontra $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$ ahol A és C / tehát B és D is / a téglalapnak szemben lévő csúcsai! 14 pont

2. Két azonos középpontú kör sugara 6 cm, illetve 8 cm. Milyen távolságra van a középponttól az a szelő, amelynek a két kör közé eső darabjai 4-4 cm hosszúságúak? 10 pont

3. Határozza meg az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot, amelyre $\overline{ab}+\overline{cd}=95$ és $\overline{cdab}-\overline{abcd}=5841$ ($\overline{ab}$ kétjegyű szám) 12 pont

4. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$3^y 9^x = 81$$
$$\lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3$$

10 pont

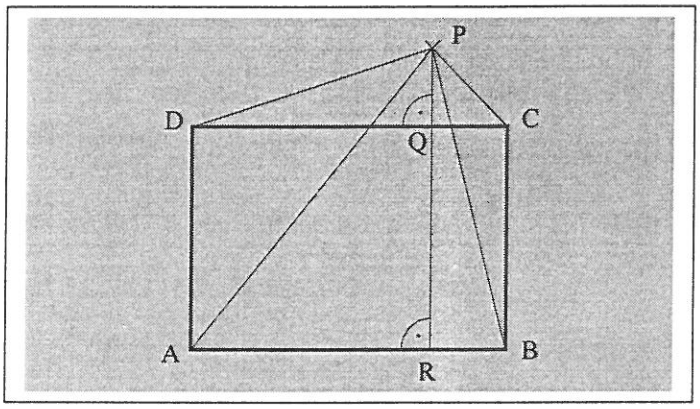
5. Határozza meg a k nem negatív egész paraméter értékét úgy ,hogy a

$$\sqrt{x^4-10x^2+25}+1=k$$

egyenletnek pontosan k db megoldása legyen! 14 pont

11.évfolyam megoldások
1998-99-es tanév

1. Helyes ábra **2** pont



ARP és DQP derékszögű háromszögekben, valamint a PCQ és PRB derékszögű háromszögekben felírva a Pitagorasz–tételt:

$AR^2 + RP^2 = AP^2$
$DQ^2 + QP^2 = DP^2$
$BR^2 + PR^2 = PB^2$
$QP^2 + QC^2 = PC^2$

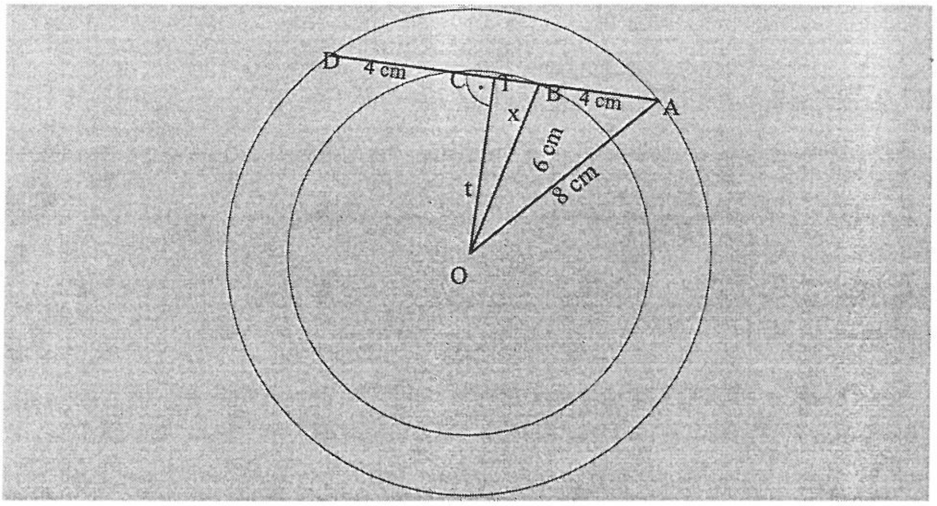
4 pont

$AP^2 + PC^2 = AR^2 + RP^2 + QP^2 + QC^2$

$DP^2 + PB^2 = DQ^2 + QP^2 + BR^2 + PR^2$ valamint $DQ=AR$ és $QC=RB$ egyenletek összevetéséből adódik az állítás. **4** pont

A feladatot abban az esetben is vizsgálni kell ha a P pont a BC illetve AD oldal egyeneseken kívül esik. 4 pont

2. Az ábra jelöléseit használva. OAD és OBC háromszögek egyenlő szárúak. OT merőlegesen felezi az AD illetve BC húrt. **2** pont



OTB derékszögű háromszögre a Pitagorász tétel:
$x^2 + t^2 = 6^2$ (1)
2 pont

OTA derékszögű háromszögre a Pitagorász tétel:
$(x+4)^2 + t^2 = 8^2$ (2)
2 pont

Négyzetre emelés után (2)-ből kivonjuk (1)-et. $8x=64 - 36$ egyenlet megoldása $x=1{,}5$ cm. **2** pont

Az (1) egyenletbe helyettesítve $2{,}25 + t^2 = 36$. $t^2 = 33{,}75$. Így $t=5{,}81$

A szelő távolsága a középponttól 5,81 cm. **2** pont

3. Legyen $\overline{ab} = x$ és $\overline{cd} = y$. 2 pont

$\overline{cdab} = 100\overline{cd} + \overline{ab} = 100y + x$ 2 pont

$\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100x + y$ 2 pont

$x + y = 95$ 1 pont

$(100y + x) - (100x + y) = 5841$ 2 pont

Az egyenletrendszer megoldása x=77 y=18 2 pont

A keresett szám az 1877 1 pont

4. Az első egyenletet hozzuk 3-as alapra. $3^y 3^{2x} = 3^4$ 1 pont

A második egyenletet alakítsuk át $\lg\frac{(x+y)^2}{x} = \lg 9$. 1 pont

Az exponenciális ill. a logaritmus függvény monotonitása miatt az alábbi egyenletrendszerhez jutunk. $y + 2x = 4$, $\frac{(x+y)^2}{x} = 9$. 2 pont

Első egyenletből y=4 -2x –et a második egyenletbe helyettesítve rendezés után $x^2 - 17x + 16 = 0$ egyenletet kapjuk. 2 pont

Ennek gyökei **x_1=16, x_2=1**. A megfelelő y értékek **y_1=-28, y_2=2.** 2 pont

Mind a két számpár megoldása az eredeti egyenletrendszernek. 2 pont

5. $0 \le \sqrt{x^4 - 10x^2 + 25}$, ezért $1 \le \sqrt{x^4 - 10x^2 + 25} + 1 = k$

$x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2 - 5)^2$ azonosság felhasználásával az egyenlet : 3 pont

$|x^2 - 5| + 1 = k \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 5| = k - 1$.

a. Ha $x^2 \ge 5$, akkor $|x| \ge \sqrt{5}$ azaz $x \le -\sqrt{5}$ illetve $\sqrt{5} \le x$.

$x^2 = k + 4 \qquad x_1 = \sqrt{k+4} \ge \sqrt{5} \qquad x_2 = -\sqrt{k+4} \le -\sqrt{5}$

k+4≥5 k+4≥5

k≥1 van két gyök 4 pont

b. Ha $x^2 < 5$, akkor $|x| < 5$ azaz $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

$x^2 = 6 - k \qquad x = \pm\sqrt{6-k}$

6-k≥0 3 pont

6≥k esetén ebben az intervallumban is két gyök van.

Az **a** és **b** esetek összegezéséből az egyenletnek négy gyöke adódik a valós számok halmazán. Ha k=6, akkor a **b** esetben a két gyök azonos, tehát összesen három gyök van. Ha k>6, akkor a **b** eset nem ad gyököt, csak az **a** esetből van kettő gyök.

A feladat feltételeinek a **k=4** felel meg. 4 pont