Bolyai János megyei matematikaverseny 1997/1998. 11. évfolyam

11 F

1. Egy r sugarú kör köré derékszögű trapézt írunk, melynek legrövidebb oldala $\frac{3}{2}r$. Mekkora a trapéz területe, kerülete, legkisebb szöge?

(11 pont)

2. Számológép és a függvénytáblázat nélkül határozza meg az alábbi x szám pontos értékét:

$$x=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}-\sqrt{5}$$

(12 pont)

3. Egy háromszög két oldala 10 cm és 15 cm, a harmadik oldalhoz tartozó magasság akkora, mint a másik két oldalhoz tartozó magasságok összege. Mekkora a harmadik oldal?

(13 pont)

4. Határozza meg, hogy a p paraméter milyen valós értékeinél hány gyöke van a következő egyenletnek!

$$\left|x^2+2x-3\right|=p$$

(14 pont)

5. Oldja meg a valós számok halmazán!

$$\log_{\frac{2}{3}}\log_{16}\left(x^2-48\right)\geq 0$$

(15 pont)

6. Számológép és a függvénytáblázat használata nélkül határozza meg, hogy hogy melyik szám a nagyobb:

$$28^{19} \quad \text{vagy} \quad 80^{14}\,?$$

(15 pont)

A feladatok megoldásához íróeszközökön, számológépen, a függvénytáblázaton és rajzeszközökön kívül más segédeszköz nem használható. A dolgozat első lapján kérjük feltüntetni a versenyző iskoláját, nevét és osztályát, szaktanárának nevét és azt, hogy heti hány tanórában tanulja a matematikát. A dolgozat további lapjain elegendő a név és osztály feltüntetése. Ha a versenyző valamelyik feladat megoldásánál olyan ismeretekre támaszkodik, mely a tananyagban nem szerepel, akkor hivatkoznia kell arra a forrásra, ahonnan azt merítette. Az eredmények közlése nem elegendő, csak kellően indokolt megoldásokat fogadunk el. A dolgozathoz fogalmazványt, piszkozatot készíteni nem szükséges, de törekedni kell az áttekinthető leírásra. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani, minden feladatnak csak egy megoldását pontozzuk. A feladatok megoldására rendelkezésre álló idő: 2,5 óra (150 perc).

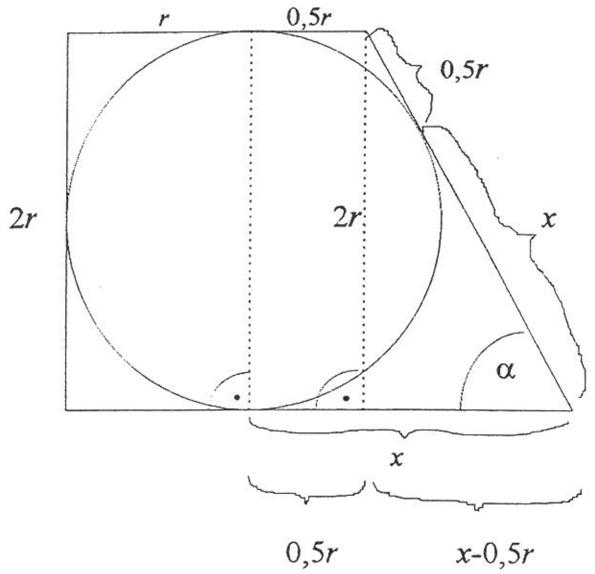
1997. november 11. *Versenybizottság*

Bolyai János megyei matematikaverseny
1997/1998.
11. évfolyam

11 M

Javítási útmutató

1..



Az érintőszakaszokra vonatkozó tétel alapján az x-szel jelölt és a $0{,}5r$ -rel jelölt szakaszok is egyenlők. *(2 pont)*

Pithagorasz tétele alapján: $(x-0{,}5r)^2+4r^2=(x+0{,}5r)^2$ *(2 pont)*

Végigszámolva: $x=2r$ *(2 pont)*

Tehát az alap: $3r$, a szárak: $2r$ és $2{,}5r$ *(1 pont)*

A trapéz kerülete: $9r$ *(1 pont)*

A trapéz területe: $\dfrac{4{,}5r\cdot 2r}{2}=4{,}5r^2$ *(1 pont)*

A legkisebb szög az ábrán jelölt α. $\sin\alpha=\dfrac{2r}{2{,}5r}=0{,}8 \Rightarrow \alpha=53{,}13°$ *(2 pont)*

2. Legyen $a=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt5}}$

Ekkor $a>0$, és a^2-ből következtethetünk a-ra: *(1 pont)*

$a^2=8+2\sqrt{6-2\sqrt5}=$ *(2 pont)*

$=8+2\sqrt{\left(\sqrt5-1\right)^2}=$ *(4 pont)*

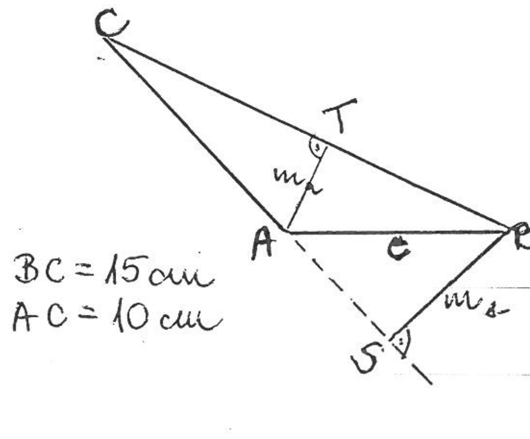
$=6+2\sqrt5=\left(\sqrt5+1\right)^2$ *(3 pont)*

$a>0$ miatt $a=\sqrt5+1$, tehát $x=1$. *(2 pont)*

3. Az ábra jelölései szerint $ATC_\Delta \sim BSC_\Delta$ (derékszögűek, s egy szögük közös.) *(5 pont)*

A hasonlóságból:

$\dfrac{m_a}{10}=\dfrac{m_b}{15} \Rightarrow m_b=\dfrac{3}{2}m_a$ *(3 pont)*



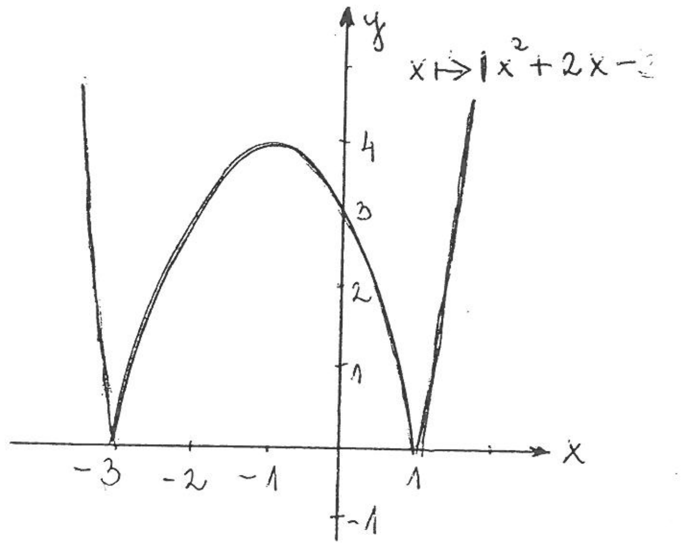
Bolyai János megyei matematikaverseny
1997/1998.
11. évfolyam

11 M

$m_c = m_a + m_b = 2{,}5m_a$ *(1 pont)*

A területből: $15m_a = c \cdot 2{,}5m_a$, tehát a harmadik oldal hossza c=6 cm. *(4 pont)*

4. Az $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ azonosságot figyelembe véve, és az eredeti egyenlet bal oldalát ábrázolva: *(4 pont)*



Ha p<0, ⇒ nincs gyök. *(2 pont)*

Ha p=0, ⇒ 2 gyök van. *(2 pont)*

Ha 0<p<4 ⇒ 4 gyök van. *(2 pont)*

Ha p=4 ⇒ 3 gyök van. *(2 pont)*

Ha p>4 ⇒ 2 gyök van. *(2 pont)*

5. A baloldali kifejezés értelmezési tartománya (a logaritmus definíciója miatt):
$x^2 - 48 > 0 \Rightarrow |x| > 4\sqrt{3}$, azaz $x < -4\sqrt{3}$ vagy $x > 4\sqrt{3}$, *(2 pont)*
továbbá $0 = \log_{16} 1$ miatt $\log_{16}(x^2-48) > \log_{16} 1$. Ebből a 16-os alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekvése miatt $x^2-48 > 1 \Rightarrow |x| > 7$, azaz $-7 > x$ vagy $x > 7$. *(3 pont)*
Összevetve a két eredményt: $-7>x$ vagy $x>7$ a kifejezés értelmezési tartománya. *(1 pont)*
Az egyenlőtlenség így írható át: $\log_{\frac{2}{3}} \log_{16}\left(x^2-48\right) \ge \log_{\frac{2}{3}} 1$ Egynél kisebb alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért $\log_{16}\left(x^2-48\right) \le 1 \Rightarrow \log_{16}\left(x^2-48\right) \le \log_{16} 16$
Egynél nagyobb alapú logaritmus-függvény szigorúan monoton növő, ezért $x^2 - 48 \le 16$. Ebből adódik $|x| \le 8$, azaz $-8 \le x \le 8$ *(7 pont)*
Összevetve a kikötésekkel, az egyenlőtlenség megoldása: $-8 \le x < -7$ vagy $7 \le x < 8$ *(2 pont)*

6. $28^{19} > 27^{19} = \left(3^3\right)^{19} = 3^{57} > 3^{56} = \left(3^4\right)^{14} = 81^{14} > 80^{14}$
Tehát $28^{19} > 80^{14}$. *(összesen 15 pont)*