13

Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1993.

III. osztály

Fogalmazványt nem kell készíteni! Olvashatóan, szépen, tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani a feladatokat, elkülönítve azokat egymástól.
A szükséges magyarázatokat szöveggel is közölje!

1. Három természetes szám szorzata 793800. Az első számot 5-tel, a másodikat 7-tel, a harmadikat pedig 9-cel szorozva ugyanazt a számot kapjuk. Melyik ez a három szám? (8 pont)

2. Egy kör köré írható érintőtrapéz szárainak hossza 3 cm és 5 cm. A trapéz középvonala az adott trapézt két olyan részre osztja, amelyek területének aránya 5 : 11. Mekkorák a trapéz párhuzamos oldalai? (8 pont)

3. Megoldandó a következő egyenletrendszer:
$$x + xy + y + 5 = 0$$
$$x^2y + xy^2 + 6 = 0$$
(11 pont)

4. Egy egységsugarú körbe négyzetet írunk, majd a négyzet két szomszédos csúcsa körül a négyzet oldalával mint sugárral egy-egy további kört rajzolunk. Számítsuk ki a három kör közös részének a területét! (9 pont)

5. Határozzuk meg a k paraméter egész szám értékeit, amelyekre a $(k^2 - 1)x^2 - (2k^2 - 3k - 1)x + k^2 - 3k + 2 = 0$ egyenlet gyökei egész számok. (14 pont)

Szombathely, 1993. november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas megyei Tagozata

Bolyai János Matematika Verseny 1993.

Javítási útmutató III. osztály

1. Legyen a három szám a, b, c

A feltételek szerint:

$a.b.c = 793\ 8oo = 2^3.3^4.5^2.7^2$

és $5a = 7b = 9c$ — 2 pont

$a = \frac{9c}{5}$ és $b = \frac{9c}{7}$ — 1 pont

Ezeket behelyettesítve:

$c^3 = 2^3.5^3.7^3$ — 2 pont

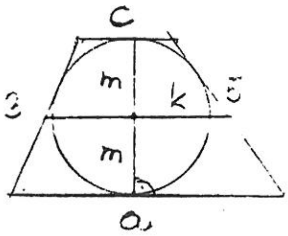
$c = 7o$ — 1 pont

A három természetes szám: 126, 9o, 7o

és ezek kielégítik a feltételeket. — 2 pont

8 pont

2.



legyen a trapéz magassága: 2m

középvonala: k

A trapéz érintőnégyszög, ezért

$a + c = 3 + 5 = 8$

$a + c = 8$ (✱) — 2 pont

A trapéz középvonala:

$k = \frac{a + c}{2} = 4$ — 1 pont

A középvonalak által keletkezett trapézok területének aránya: $\left(\frac{k + c}{2} . m\right) : \left(\frac{a + k}{2} . m\right) = 5 : 11$ — 2 pont

Felhasználva, hogy $k = 4$

$5a - 11c = 24$ (✱✱) adódik — 1 pont

(✱) és (✱✱) -ból:

$a + c = 8$

$5a - 11c = 24$

Ebből a párhuzamos oldalak hossza: $a=7$; $c = 1$ — 2 pont

8 pont

3. A második egyenlet $xy(x+y) = -6$ alakban irható, ezért célszerű az $n = x + y$; $v = xy$ helyettesítést alkalmazni:

így: $n + v = -5$

$n.v = -6$ egyenletrendszert kapjuk 3 pont

A kapott egyenletrendszer gyökei:

$n_1 = 1 \quad v_1 = -6$

$n_2 = -6 \quad v_2 = 1$ 2 pont

n és v értékeit felhasználva

$x + y = 1$ és $x + y = -6$

$x.y = -6$ (✱) $\quad x.y = 1$ (✱✱)

egyenletrendszerekhez jutunk.

(✱) megoldása: $x_1 = -2$; $y_1 = 3$

$x_2 = 3$; $y_2 = -2$ 2 pont

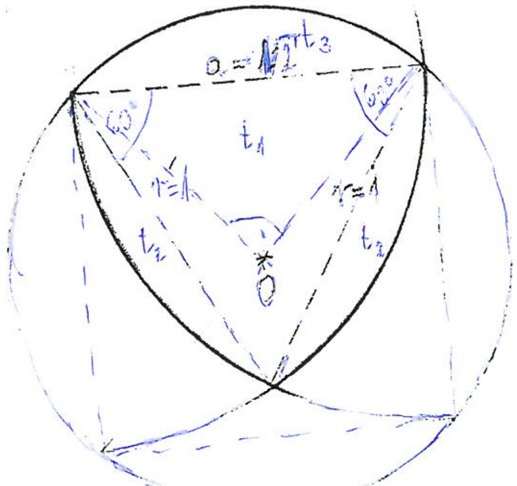
(✱✱) megoldása: $x_3 = -3-2.\sqrt{2}$; $y_3 = -3 + \sqrt{2}$ 2 pont

$x_4 = -3 + 2.\sqrt{2}$; $y_4 = -3 - \sqrt{2}$

A kapott gyökök kielégítik az egyenletrendszert 2 pont

11 pont

4.



A helyes [illegible] 2 pont

Kiszámítandó területek:

- egy $\sqrt{2}$ oldalhosszúságú szabályos háromszög területe $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2 pont
- két $\sqrt{2}$ sugarú kör 60°-os középponti szögéhez tartozó körszelet: $2t_2 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 2 pon
- Egy egységsugarú kör 90°-os középponti szögéhez tartozó körszelet: $t_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ 2 pon

A keresett terület:

$$T = t_1 + 2t_2 + t_3 = \frac{11\pi}{12} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

1 pon

9 pont

5. $k^2 - 1 = (k-1)(k+1) = 0$ esetén az egyenlet elsőfokú.
- ha $k = -1$, az egyenlet $-4x + 6 = 0$, nincs egész gyöke,
- ha $k = 1$, az egyenlet $x = 0$, ami egész szám 2pont

Ha $k^2-1 \neq 0$, akkor az egyenlet másodfokú.

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (k-3)^2$$ 2 pont

Az egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{(2k^2-3k-1) \pm (k-3)}{2(k^2-1)}$$

$$x_1 = \frac{k-2}{k-1} = 1 - \frac{1}{k-1}$$ 2 pont

x_1 egész szám, ha $(k-1) \mid 1$-nek

$k-1 = \pm 1$; $k = 2$ vagy $k = 0$ 2 pont

$$x_2 = \frac{k-1}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1}$$ 2 pont

x_2 egész szám, ha $(k+1) \mid 2$

$k + 1 = \pm 1$ vagy $k + 1 = \pm 2$

$k = 0$, vagy -2 vagy 1, vagy -3 2 pont

Mivel mindkét gyök egész szám, ez csak $k = 0$-ra teljesül 1 pont

Az eredeti egyenletünk gyökei tehát $k=0$ és $k = 1$ esetén lesznek egész számok. 1 pont

14 pont