Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1991.

III. osztály

1./ Végezze el a kijelölt műveleteket! $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a \neq b$

$$\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^3}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}+\sqrt{b^3}}+\frac{\sqrt{b}}{a+b}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}\right)=$$

8 pont

2./ Legyen az ABCD deltoid szimmetriatengelye AC és a B és D csúcsoknál lévő szögei derékszögek. Fejezzük ki a deltoidba írható kör sugarát az oldalak hosszának segítségével!

8 pont

3./ Az a,b,c, valós számokra fennáll az

$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ egyenlőség.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a=b=c$!

10 pont

4./ Állapítsuk meg két szám negyedik hatványának összegét, ha e számok összege 10 és szorzata 4!

10 pont

5./ Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

14 pont

$$\sqrt[3]{2x^2+x-9}+\sqrt[3]{100-x-2x^2}=7$$

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért az eredeti pontszám fele adható.

Szombathely, 1991. november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas Megye Tagozata

Javítási útmutató

III. osztály

1./ A nevezőkben kiemelések segítségével szorzattá alakítás, 3 p

majd közös nevezőre hozás. 2 p

A számlálók szorzattá alakítása után az osztó reciprok

értékét véve: 2 p

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$$

A lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve adódik: 1 p

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$ 8 p

3./ Az egyenlőség 0-ra redukált alakjának mindkét oldalát

2-vel szorozva, céljainknak megfelelően rendezve,

$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$ 3 p

ami $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ alakban is írható. 2 p

Ez a valós számok körében csak úgy lehetséges, ha mind-

három tag 0, azaz $a=b=c$. 2 p

Az átalakítások akvivalenciája miatt az eredeti egyenlőség-

nek is ez a feltétele. 1 p

8 p

2./ Tekintsük a B csúcsból a beírt körhöz húzott érintősza-

kaszokat. Ezek egymással és - a B csúcsnál levő derék- 2 p

szög miatt - a beírt kör sugarával is egyenlőek. 2 p

S-el a kör középpontját, N-el a kör és a BC oldal érin-

tési pontját jelölve,

a CSN és CAB derékszögű háromszögek hasonlóságát kihasz-

nálva, 2 p

a megfelelő oldalak arányából 2 p

a kör sugara kifejezhető: $r=\frac{ab}{a+b}$ 2 p

10 p

4./ Jelöljük a szóban forgó két számot x és y-nal.
Fejezzük ki $x^4 + y^4$ értékét x+y és xy segítségével:

$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 =$ 4 p

$= \left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2$ 4 p

A megadott értékeket behelyettesítve: $x^4+y^4 = 8432$ 2 p

10 p

5./ Az első gyökjel alatti kifejezést helyettesítsük y-nal

$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y-91} = 7$ (*) 3 p

A két tag összegének köbére vonatkozó azonosságot a következő alakban használva $(a-b)^3=a^3-b^3+3ab(b-a)$ köbre emelünk. 3 p

A (b-a) kifejezés helyére a (*) egyenlőségből -7-et helyettesítve, 2 p

újabb köbre emelés után: $y^2-91y+1728=0$ adódik.

Ebből: $y_1 = 64$ $y_2 = 27$ 2 p

Tehát: $x_{1;2} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{65}}{4}$ $x_3=4$ $x_4=-4,5$ 2 p

Ezek a megoldások mind kielégítik az egyenletet. 2 p

14 p

Összes pontszám: 50