BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKA VERSENY FELADATAI - 1990

III. osztály

Fogalmazványt nem kell késziteni! Olvashatóan, szépen, tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani a feladatokat, elkülönitve azokat egymástól.
A szükséges magyarázatokat szöveggel is közölje !

1./ Oldja meg az $(x-1)^2 + 2 \leqq 2\sqrt{x^2}$ egyenlőtlenséget ! 6 pont

2./ Egy téglalap szomszédos oldalainak felezőpontját összekötve olyan rombuszt kapunk, amelynek a kerülete 40 cm, területe 96 cm^2. Mekkorák a téglalap oldalai ? 8 pont

3./ Oldja meg az

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 3^{x-3} = 99 + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}$$

egyenletet ! 8 pont

4./ Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$x^{\log_4 y} + y^{\log_4 x} = 4$$
$$\log_2 x - \log_2 y = 1$$

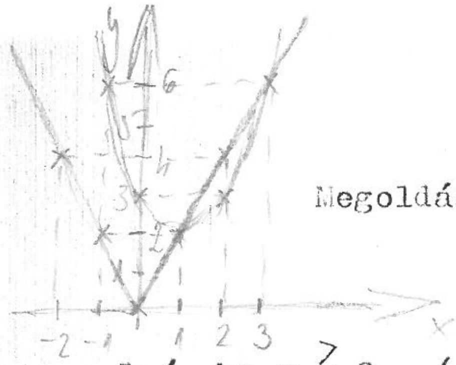
14 pont

5./ Rajzolja meg egy ABC háromszög AP sulyvonalát és AQ belső szögfelezőjét, ahol P és Q illeszkedik BC oldalra. Az APQ kör AB oldalt E, A C oldalt F pontban metszi. Bizonyitsa be, hogy BE = CF ! 14 pont

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért az eredeti pontszám fele adható / ahol tört lenne, felkerekithető /.

Szombathely, 1990. november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas Megyei Tagozata



Megoldási és pontozási útmutató Bolyai Verseny

III. osztály

1./ ha $x \geqq 0$, $(x-1)^2 + 2 \leqq 2x$ megoldásával $1 \leqq x \leqq 3$ 3p

ha $x < 0$, $(x-1)^2 + 2 \leqq -2x$

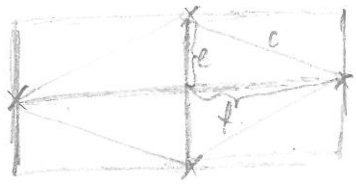
$x^2 + 3 = 0$ nincs megoldása 2p

Tehát az egyenlőtlenség megoldása $1 \leqq x \leqq 3$ $x \in R$ 1p

6p

2./ Jelöljük a rombusz átlóit 2e-vel és 2f-fel, oldalait c-vel.

$4c = 40$ $c = 10$ 1p



$2ef = 96$

$e^2 + f^2 = 100$ 3p

Összeadva a két egyenletet: $e + f = \pm 14$ 1p

Kivonva a két egyenletet: $e - f = \pm 2$ 1p

A geometriai tartalom miatt az egyenletrendszer pozitiv megoldásait keressük: $e = 8$ cm és $f = 6$ cm 1p

A téglalap oldalai: $2e = a = 16$ cm

$2f = b = 12$ cm 1p

8p

3./ $3^{x-2} + 3^{x-3} = 99 + 3^{x-4}$ 3p

$$\frac{3^x}{9} + \frac{3^x}{27} = 99 + \frac{3^x}{81}$$ 2p

$11 \cdot 3^x = 99 \cdot 81$ 2p

$x = 6$ 1p

8p

4./ kikötések

a második egyenletből $\frac{x}{y} = 2 \qquad x = 2y$ 1p 2p

x-et behelyettesitve az első egyenletbe

$$(2y)^{\log_4 y} + y^{\log_4 2y} = 4$$ 1p

átalakitás után $y^{\frac{1}{2} + \log_4 y} = 2$ 3p

mindkét oldal 10-es alapu logaritmusát véve, 1p

majd a 4-es alapról is 10-es alapra térve 1p

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\lg y}{\lg 4}\right)\lg y = \lg 2$$

A lgy-ra nézve másodfoku egyenlet megoldásai: $\lg y = \begin{cases} \lg 2 \\ -2\lg 2 \end{cases}$ 3p

$y_1 = 2 \qquad y_2 = \frac{1}{4}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = \frac{1}{2}$

Mindkét megoldáspár kielégiti az egyenletrendszert 1p

1p

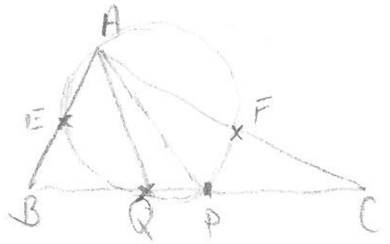
14p

5./ A szögfelezőre vonatkozó tétel szerint $\frac{BQ}{QC} = \frac{AB}{AC}$ (1) 2p

érintőszakasz-szelő mértani közép összefüggések ugyanakkora érintőszakaszra vonatkoztatva:

B-ből: BE • BA = BQ • BP (2)

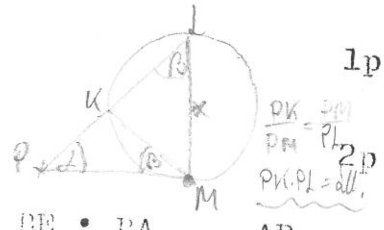
C-ből: CF • CA = CQ • CP (3) 2p 2p



(2)-ből $BP = \frac{BE \cdot BA}{BQ}$

(3)-ból $CP = \frac{CF \cdot CA}{CQ}$ 1p

Mivel BP = CP $\qquad \frac{BE \cdot BA}{BQ} = \frac{CF \cdot CA}{CQ}$ 1p



átrendezve: $\frac{BE \cdot BA}{CF \cdot CA} = \frac{BQ}{CQ}$ 2p

(1) miatt $\frac{BE \cdot BA}{CF \cdot CA} = \frac{AB}{AC}$

egyenlőség csak akkor állhat fent, ha $\frac{BE}{CF} = 1$, 2p

tehát BE = CF

2p

14p