Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1989.

III. osztály

1. Számítsd ki a következő kifejezés pontos értékét!

$$A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\;\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\;\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

6 pont

2. Igazold, ha $a^2=b^2+c^2$, akkor $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{2}bc$,

(Heron képlet)

ahol $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

8 pont

Fogalmazd meg a feladat geometriai tartalmát!

3. Határozd meg "k"-t úgy, hogy az

$A=(5-k)x^2-2(1-k)x+2-2k$ kifejezés x minden értékére

negatív legyen. $x\in R$ és $k\in R$

8 pont

4. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben az oldalak

$a=n^2+3n+3$

$b=n^2+2n$

$c=2n+3$, ahol $n\in N$ és $n>1$,

akkor a háromszög egyik szöge 120^0.

8 pont

5. Általános háromszög súlyvonalai 4,5 cm, 6 cm, 6,9 cm.

Szerkeszd meg a háromszöget és számítsd ki a területét!

10 pont

Útmutató a versenydolgozatok értékeléséhez (1989.)

III. osztály

1. Induljunk el visszafelé. Az utolsó két négyzetgyökös kifejezés szorzata az $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ azonosság alapján

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ lesz. 2 pont

Ha ezt megszorozzuk a második tényezővel (hasonlóan az előzőhöz), $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ -at kapunk. 2 pont

Ezt szorozva az első tényezővel, az eredmény: 1. 2 pont

6 pont

2. A Heron képletbe az "s" helyére beírva $\frac{a+b+c}{2}$ -t 2 pont

közös nevezőre hozva, alkalmas módon csoportosítva, 2 pont

szorzattá alakítva és felhasználva az $a^2=b^2+c^2$

kezdeti feltételt, kapjuk a kívánt állítást. 3 pont

A geometriai megfogalmazásért: a Heron képlet speciális esetben (derékszögű háromszögben) a területet úgy adja meg, hogy a terület a befogók szorzatának a fele. 1 pont

8 pont

3. Tekintsük a kapott kifejezést x másodfokú függvénynek, ennek grafikonja általános helyzetű parabola. Ez akkor lehet minden x-re negatív, ha $5-k<0$ vagyis $k>5$, 2 pont

és ezzel egyidejűleg a függvénynek nincs 0 helye, vagyis a polinomhoz tartozó másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív. A diszkriminánst felírva, 2 pont

"k"-ra a $-k^2+10k-9<0$ másodfokú egyenlőtlenséget 2 pont

kapjuk. Ezt megoldva (vagy ábrázolva) kapjuk, hogy $k<1$ és $k>9$.

Összevetve k-ra kapott első feltétellel ($k>5$) nyerjük, hogy $k>9$ esetén lesz "A" kifejezés minden valós x-re negatív. 2 pont

8 pont

4. Az "n"-re adott feltételek alapján belátható, hogy a legnagyobb oldal "a", így vele szemben van a legnagyobb szög.

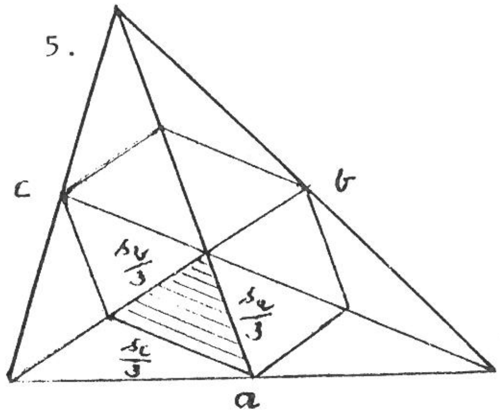
2 pont

"a"-ra felírva a cosinus tételt és a trigometrikus egyenletet megoldva kapjuk, hogy $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ 4 pont

A kapott szög, mivel cosinusa negatív, a feladat értelmében csak a második negyedbe tartozhatik, tehát $\alpha=120°$ 2 pont

8 pont

5.



a jó vázlatért — 2 pont

Annak bizonyítása, hogy a háromszögben egy súlyvonal a háromszöget két egyenlő területű részháromszögre osztja. — 2 pont

Ezt felhasználva, annak kimutatása, hogy a súlyvonalak egyharmadával szerkesztett háromszög 12-szer kisebb az adott háromszögnél. — 2 pont

A súlyvonalak harmadával szerkesztett háromszögből az adott háromszög szerkesztése. — 2 pont

A súlyvonalak harmadával szerkesztett háromszög területének kiszámítása (különböző módszerekkel)

$t=1{,}48\ cm^2$

$T=12t=17{,}76\ cm^2$ — 2 pont

10 pont