

III. osztály

1. A közelítőértékek kiszámítása nélkül határozza meg, hogy melyik kifejezés a nagyobb!
 $\sqrt{11}-\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{19}-\sqrt{11}$ /6 pont/
2. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!
 $x(x+1)(x^2+x+1) = 42$ /8 pont/
3. Ha egy kétjegyű szám kétszereséből egyet levonunk, akkor olyan kétjegyű számot kapunk, amely az eredeti szám jegyeit fordított sorrendben tartalmazza. Melyik ez a szám? /9 pont/
4. Egy négyzet középpontján át a négyzet síkjában tetszőleges egyenest rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a négy csúcs egyenestől mért távolságainak a négyzetösszege állandó! /11 pont/
5. Határozza meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek kielégítik az $xy^2+2xy+x-243y = 0$ egyenlőséget! /13 pont/
6. Bizonyítsa be, hogy bármely hegyesszögű háromszög köré írt kör középpontjából a háromszög egyik csúcsába futó sugár merőleges a másik két csúcsból kiinduló magasságvonalak talppontjait összekötő egyenesre! /15 pont/

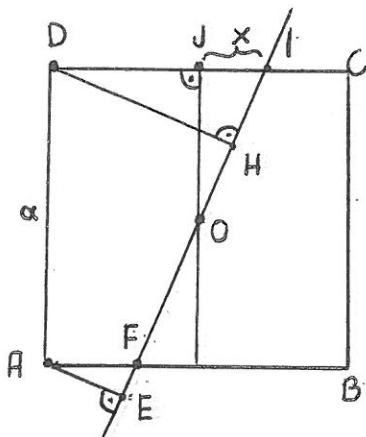
Megoldások

III. osztály

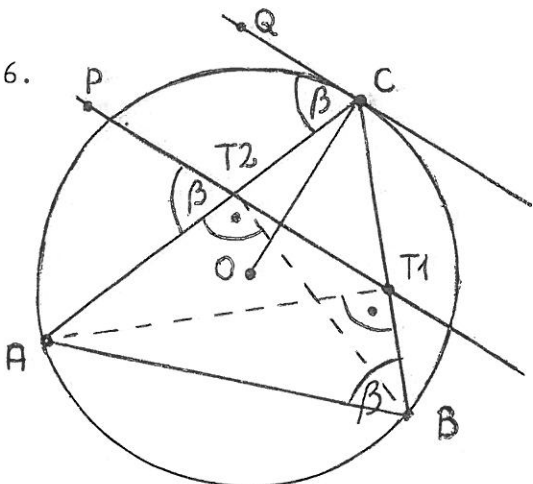
1. Átrendezve: $2\sqrt{11}\sqrt{5} + \sqrt{19}$ mindkét oldal pozitív négyzetreemelés után $10\sqrt{95}$ adódik, ami igaz
 2 pont
 4 pont
összesen 6 pont

2. Legyen $x^2+x=a$. Ekkor $a(a+1)=42$ egyenletet kapjuk.
 $a_1=6$ $a_2=-7$ 2 pont
 $x^2+x=6$ $x_1=-3$ $x_2=2$ 2 pont
 $x^2+x=-7$ $D<0$ 1 pont
összesen 8 pont

3. Legyen a szám $10x+y$. $x, y \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$
 $20x+2y-1=10y+x$ 2 pont
 $19x-1=8y$, tehát x páratlan és $19x-1 \leq 72$ $x \leq 3$ 3 pont
 $x=1$ nem lehetséges, így a megoldás: $x=3$ és $y=7$ - ellenőrzés 3 pont
összesen 9 pont

4.  AEF, DHI, OJI háromszögek hasonlóak 2 pont
 $DH=OJ$ (DI/OI) =
 $\left[\frac{a/2}{a/2+x} \right] / \sqrt{(a/2)^2+x^2}$ 3 pont
 $AE=OJ$ (AF/OI) =
 $\left[\frac{a/2}{a/2-x} \right] / \sqrt{(a/2)^2+x^2}$ 3 pont
 Ezekből $2(DH^2+AE^2) = a^2$ 3 pont
összesen 11 pont

5. $x(y+1)^2 = 243y$ 3 pont
 y és $y+1$ relatív prímelek, ezért $(y+1)^2 / 243$ 4 pont
 $243 = 3^5$ 1 pont
 243 négyzetszám osztói $1, 9, 81$ 1 pont
 ha $(y+1)^2=81$, akkor $y=8$ és $x=24$ 2 pont
 ha $(y+1)^2=9$, akkor $y=2$ és $x=54$ 2 pont
összesen 13 pont

6.  Húzzuk meg a kör C pontbeli érintőjét.
 Az ACQ érintő szárú ker.szög = β 3 pont
 T_1 és T_2 az AB szakasz Thalesz körén van, így az AB $T_1 T_2$ négyszög húrnégyszög 6 p.
 emiatt az $A T_2 P$ szög = β , 2 pont
 az érintő párhuzamos $T_1 T_2$ egyenessel, 2 pont
 az érintő merőleges OC-re 2 pont
összesen 15 pont