1980.

III. osztály feladatai

1./ Mennyi az alábbi kifejezés értéke, ha $a = \frac{1}{2}$?

$$\frac{1 - a^2}{\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)} - 1 =$$

2./ Bizonyitsa be, hogy ha egy háromszög egyik oldala mértani középarányos a másik két oldal között, akkor a vele szemben fekvő szög nem lehet nagyobb 60°-nál.

3./ Egy háromszög egyik szöge $\gamma = 120^\circ$; e szöget bezáró CB és CA oldalak hossza a és b. Fejezze ki a-val és b-vel a 120°-os szög csucsából induló szögfelező háromszögbe eső szakaszának hosszát!

4./ Oldja meg az alábbi egyenletet:

$$\sqrt[x]{9} - \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{4}$$

A feladatokat tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani. A megoldáshoz minden segédeszköz használható. Elvileg különböző megoldásért a pontszám fele jár.

XII. osztály feladatainak megoldása.

A nevező első tényezője így írható:

$$\frac{1-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a}{1-\sqrt{a}} = \frac{(1-a)+\sqrt{a}(1-a)}{1-\sqrt{a}} = \frac{(1-a)(1+\sqrt{a})}{1-\sqrt{a}}$$

hasonlóan a második tényező:

$$\frac{(1-a)(1-\sqrt{a})}{1+\sqrt{a}}$$

1 pont

tehát a nevező $(1-a)^2$ 1 "

Ennélfogva az egész kifejezés:

$$\frac{1-a^2-(1-a)^2}{(1-a)^2} = \frac{2a(1-a)}{(1-a)^2} = \frac{2a}{1-a}$$ 1 "

természetesen feltettük, hogy $a \neq 1$, különben az adott kifejezésnek nincs értelme, de az egyszerűsített végeredménynek sem.

$a = 1$, $A = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\dots} = 2$

III. osztály feladata

Felhasználva, hogy $\sin\left(2\cdot\frac{\gamma}{2}\right) = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = f(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}$

Osztva mindkét oldal $2abf\sin\frac{\gamma}{2}$-vel

$\frac{1}{f}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 4 pont

$\gamma = 120^\circ$ esetében: $\cos\frac{\gamma}{2} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 1 pont

$f = \frac{ab}{a+b}$ 1 pont

8

4. feladat

Osszuk végig az egyenletet $\sqrt[x]{4}$-gyel 4 pont

$\frac{\sqrt[x]{9}}{\sqrt[x]{4}} - \frac{\sqrt[x]{6}}{\sqrt[x]{4}} = 1$