1974.

III. osztályos

A dolgozatokhoz fogalmazványt irni nem szükséges. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben lehet megoldani. Két elvileg helyes megoldásért másfélszeres pontszám jár.

1./ Számitsa ki és szerkessze meg "d" értékét, ha

$$d = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$$

2./ A "p" paraméter mekkora értékénél lesz az

$$x^2 + /3p - 2/x - 7p - 1 = 0$$

egyenletben a gyökök négyzeteinek összege a legkisebb? Mekkora ez a legkisebb érték?

3./ Oldja meg a következő egyenletet:

$$x^{\sqrt{x}} = /\sqrt{x}/^x$$

4./ Egy szög egyik szárát érintő, adott R sugaru kör a másik szárból adott "a" és "b" hosszuságu szakaszokat metsz le. Mekkora a szög?

A III. osztályosok részére kitűzött feladatok megoldásai

1./

$d = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

$d = \sqrt{9 + 6\sqrt{5} + 5} - \sqrt{9 - 6\sqrt{5} + 5}$ A teljes négyzetek

$d = \sqrt{/\,3 + \sqrt{5}\,/^2} - \sqrt{/\,3 - \sqrt{5}/^2}$ kialakitása 2 pont

$d = 3 + \sqrt{5} - /3 - \sqrt{5}|$ $\sqrt{9-6\sqrt{5}+5} \neq \sqrt{5}-3<0$ 1 pont

$d = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4720$ d számérték 1 pont

Bármely jó geometriai szerkesztés 1 pont

Összesen 5 pont

2./

$$x^2 + /\,3p - 2\,/\,x - 7p - 1 = 0$$

A keresett összeg: $x_1^2 + x_2^2 = /\,x_1 + x_2\,/^2 - 2x_1x_2$ 1 pont

Felhasználva: $x_1 + x_2 = -\,/\,3p - 2/$

és $x_1 x_2 = -7p - 1$ 1 pont

behelyettesitve és rendezve

$x_1^2 + x_2^2 = 9p^2 + 2p + 6 =$ 1 pont

$= /\,3p + \frac{1}{3}\,/^2 + \frac{53}{9}$ átalakitás 2 pont

A kifejezés elemzése 2 pont

Minimális, ha $3p + \frac{1}{3} = 0$ azaz $p = -\frac{1}{9}$ 1 pont

Ekkor a keresett összeg minimuma : $\frac{53}{9}$

Összesen 8 pont

3./

Az egyenlet: $x^{\sqrt{x}} = /\sqrt{x}/^x$

$x \neq 0$ mert 0^0 hatványt nem értelmeztük. 1 pont

$x > 0$ valós megoldás esetén 1 p

Az egyenletet négyzetre emelve: $x^{2\sqrt{x}} = x^x$ 1 p

Elemzése 1 p

Eredmények: $x_1 = 4$ $x_2 = 1$ 2 p

Ellenőrzés 1 p

Összesen 7 pont

4./

Alkalmas ábra bármely jelöléssel 1 pont

$\overline{AE}^2 = ab$ Bebizonyitva vagy ismert tételként felhasználva 2 p

Az ACF derékszögü háromszög befogói:

$\overline{AF} = b\cos\alpha$ $\overline{CF} = b\sin\alpha$ 1 p

Ezek felhasználásával a derékszögü háromszög oldalai

/OCD/ $\overline{OD} = b\cos\alpha - \sqrt{ab}$

$\overline{CD} = b.\sin\alpha - r$ és $\overline{OC} = r$ 1 p

Ezekre $/b\cos\alpha - \sqrt{ab}/^2 + /b\sin\alpha - r/^2 = r^2$ 1 p

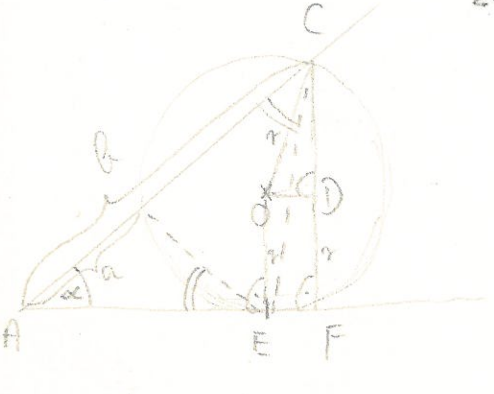
A müveletek elvégzése és a rendezés után a másodfoku egyenlet:

$$/r^2+ab/\sin^2\alpha - r/a+b/\sin\alpha + \frac{/a-b/^2}{4} = 0$$

2 p

Az egyenlet gyökei:

$$/\sin\alpha/_{1;2} = \frac{r/a+b/\pm\sqrt{4abr^2-ab/a-b/^2}}{2/r^2+ab/}$$



Elemezve 2 p

Összesen 1o pont