1802-1860

Bolyai János Megyei Matematika Verseny

2002.

Feladatok
10. évfolyam

1. feladat

a) Mely (x;y) számpárra teljesül a következő egyenlőség, ahol $x \in \boldsymbol{R}$ és $y \in \boldsymbol{R}$?

$$x^2 + y^2 = 4004x + 4004y - 2 \cdot 2002^2$$

5 pont

b) Mennyi a $\dfrac{4004}{x^2 + 2x + 3}$ kifejezés legnagyobb értéke?

5 pont

2. feladat

Egy téglalap oldalai **AB = 19 cm** és **AD = 12 cm** hosszúak. Az AB szakasz P pontjára teljesül, hogy **DP+PB=25cm**. Mekkora területű részekre osztja a téglalapot a DP egyenes?

10 pont

3. feladat

Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{1}{2 - \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{x}}} = \frac{|1 - 2x|}{|3x - 2|}$$

12 pont

4. feladat

Mely k egész számok esetén lesz a következő kifejezés helyettesítési értéke is egész szám?

$$\left(\frac{k-1}{k+1} + \frac{k+1}{1-k} - \frac{4k^2}{k^2-1}\right) : \left(\frac{2}{k^3+k^2} - \frac{2k^2-2k+2}{k^2}\right)$$

15 pont

5. feladat:

Az ABC derékszögű háromszög **AC** és **BC** befogói fölé kifelé négyzeteket szerkesztünk, amelyek csúcsai rendre ACDE és BCFG. Igazold, hogy az EG szakaszt az ABC háromszög köré írt kör felezi!

13 pont

Bolyai János Megyei Matematikaverseny 2002.
Javítási útmutató
10. évfolyam

1. feladat

a) Rendezzük át, és alkalmazzuk a két tag különbségének négyzetére vonatkozó azonosságot:

$$x^2-4004x+2002^2+y^2-4004y+2002^2=0$$

$$(x-2002)^2+(y-2002)^2=0 \qquad \text{2 pont}$$

Két négyzetszám összege 0, ha mindegyik 0, azaz

$x-2002=0$ $\qquad$ $y-2002=0$

$x=2002$ $\qquad$ $y=2002$ $\qquad$ 2 pont

Tehát az egyenlőség a (2002;2002) számpárra teljesül. $\qquad$ 1 pont

Összesen: 5 pont

b) Az $A=\dfrac{4004}{x^2+2x+3}$ kifejezés a legnagyobb értékét akkor veszi fel, amikor nevezője a legkisebb. $\qquad$ 1 pont

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2 \Rightarrow x=-1$ -nél a legkisebb a nevező, ekkor $\qquad$ 2 pont

$A=\dfrac{4004}{2}=2002$ a kifejezés legnagyobb értéke. $\qquad$ 2 pont

Összesen: 5 pont

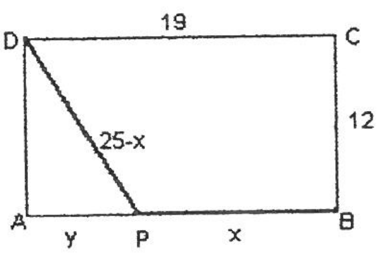
2. feladat

Helyes ábra $\qquad$ 1 pont

DP = 25 – x

19 = x + y $\qquad$ 2 pont

APD derékszögű háromszögre felírjuk Pitagorasz tételét:



$$12^2+y^2=(25-x)^2$$
$$12^2+y^2=(25-19+y)^2$$
$$144+y^2=36+12y+y^2$$
$$y=\frac{144-36}{12}=\frac{108}{12}=9$$
$$x=19-9=10$$

4 pont

APDΔ területe 54 cm² és PBCD négyszög területe 174 cm². $\qquad$ 3 pont

Összesen: 10 pont

3. feladat

$$x \neq \frac{2}{3}; \qquad x \neq 0; \qquad x \neq \frac{1}{2}$$ 2 *pont*

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2-\frac{x}{2x-1}} = \frac{2x-1}{3x-2} = -\frac{1-2x}{3x-2}$$ 4 *pont*

Az $|a| = -a$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \leq 0$ 1 pont

$$x \neq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-2x}{3x-2} < 0$$ 1 *pont*

$$\left.\begin{array}{l} 1-2x<0 \\ 3x-2>0 \end{array}\right\} \quad \text{vagy} \quad \left.\begin{array}{l} 1-2x>0 \\ 3x-2<0 \end{array}\right\}$$

$$x > \frac{2}{3} \qquad\qquad x < \frac{1}{2}$$ 3 *pont*

$x \neq 0$, *megoldáshalmaz*:

$$]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\tfrac{1}{2}[\quad \cup \quad]\tfrac{2}{3};+\infty[$$ 1 *pont*

Összesen: 12 pont

4. feladat

$k \neq 0; \quad k \neq 1; \quad k \neq -1$ 1 *pont*

$$A = \frac{k-1}{k+1} + \frac{k+1}{1-k} - \frac{4k^2}{k^2-1} = \frac{(k-1)^2-(k+1)^2-4k^2}{(k+1)(k-1)} = \frac{-4k-4k^2}{(k+1)(k-1)} = \frac{-4k}{k-1}$$ 2 *pont*

$$B = \frac{2}{k^3+k^2} - \frac{2k^2-2k+2}{k^2} = \frac{2-2(k^2-k+1)(k+1)}{k^2(k+1)} = \frac{2-2k^3-2}{k^2(k+1)} = \frac{-2k}{k+1}$$ 2 *pont*

$$A:B = \frac{-4k}{k-1} \cdot \frac{k+1}{-2k} = \frac{2k+2}{k-1}$$ 2 *pont*

$$\frac{2k+2}{k-1} = \frac{2(k-1)+4}{k-1} = 2 + \frac{4}{k-1}$$ *egész, ha* $k-1$ *osztója* $4-$*nek* 3 *pont*

k-1	4	-4	2	-2	1	-1
k	5	-3	3	-1	2	0

3 pont

A feltételek figyelembe vételével: k∈{-3; 2; 3; 5} 2 pont

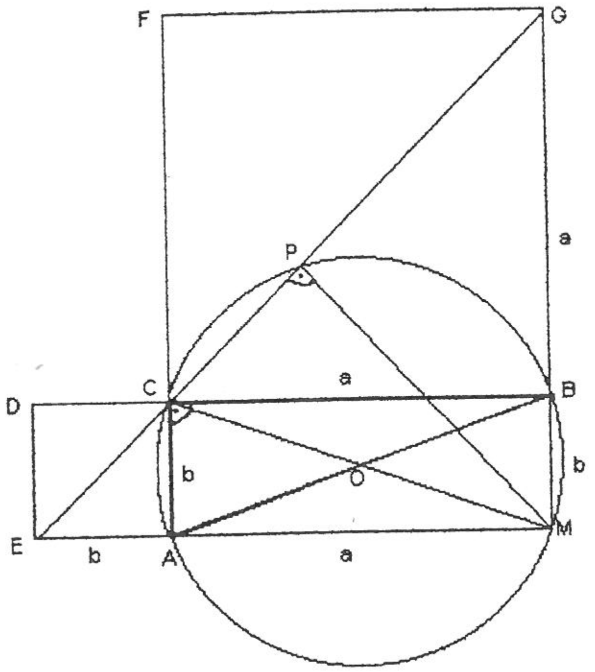
Összesen: 15 pont

5 feladat

Ábra — 2 pont

ECG$\sphericalangle$ = ECA$\sphericalangle$ + ACB$\sphericalangle$ + BCG$\sphericalangle$ = $45° + 90° + 45° = 180°$, azaz E, C és G egy egyenesre illeszkednek. — 2 pont

A szerkesztésből következik, hogy EA pontokat összekötő egyenes merőleges a GB pontokat összekötő egyenesre és M metszéspontjuk illeszkedik az ABC derékszögű háromszög Thalész-körére. ⇒ MBCA négyszög téglalap — 4 pont



GM = a + b = EM ⇒ EMGΔ egyenlő szárú derékszögű háromszög. — 1 pont

CMPΔ is derékszögű Δ, mert mindegyik csúcsa illeszkedik az ABC derékszögű háromszög Thalész-körére, CM átmérő és CPM$\sphericalangle$ = 90° — 1 pont

PM az EMG egyenlő szárú derékszögű háromszög EG alaphoz tartozó magasságvonala, ami egyben oldalfelező merőleges is — 2 pont

Tehát P pont felezi EG-t. — 1 pont

Összesen: 13 pont

Maximálisan 60 pont érhető el.