6F

BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKAVERSENY feladatai , 1995/96. tanév

A szakközépiskolák és a gimnáziumok 2. osztálya ,
a nyolcosztályos gimnáziumok 6. osztálya ,
a hatosztályos gimnáziumok 4. osztálya számára .

A függvénytáblázaton kívül más könyv nem használható, kalkulátor használható,
számítógép nem használható !
A feladatok megoldását kellően indokolni szükséges !
Ügyeljünk az áttekinthető külalakra !
időtartam 2 óra 30 perc

1./ Az x és y valós számokról tudjuk, hogy $x+y>0$. Bizonyítsuk be , hogy

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad !$$

7 pont

2./ Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést !

$$A=\frac{\sqrt{7-\sqrt{21+\sqrt{80}}}}{1+\sqrt{7+\sqrt{48}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}}$$

7 pont

3./ Add meg az m valós szám lehetséges értékeit úgy, hogy a $\{x\}+1=mx+1$ egyenletnek pontosan két megoldása legyen , ahol x az ismeretlen !
$\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti

6 pont

4./ Az ABC egyenlőoldalú háromszög középpontja O . Egy a B és O pontokon átmenő kör O_1 középpontja legyen az AB oldalon .

a., Igazoljuk, hogy AO a kör érintője !

b., Legyen Q a kör és a BC oldal második metszéspontja , P a kör és az AB oldal második metszéspontja .
Igazoljuk , hogy PQ párhuzamos AO - val !

c., Határozzuk meg, hogy BC szakasz hányszorosa BQ -nak !

8 pont

5./ Bizonyítsuk be, hogy bármilyen egész szám is n , az $n(n+2)(25n^2-1)$ osztható 24 - gyel !

8 pont

Szombathely , 1995. november 7.

6 M

BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKAVERSENY feladatainak megoldása 1995/96. tanév
A szakközépiskolák és a gimnáziumok 2. osztálya,
a nyolcosztályos gimnáziumok 6. osztálya,
a hatosztályos gimnáziumok 4. osztálya számára.

1./ Végezzük el a következő átalakítást! $\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2} \geq \dfrac{x+y}{xy}$ $\quad x \neq 0,\ y \neq 0$ 2 p

A feltétel szerint $x+y>0$ és $x^2y^2>0$, ezért $\dfrac{x^3+y^3}{x+y} \geq \dfrac{x^2y^2}{xy}$ 2 p

$$x^2 - xy + y^2 \geq xy$$

$$(x-y)^2 \geq 0$$ 2 p

Ekvivalens átalakítással nyilvánvaló egyenlőtlenséget kaptunk, így az eredeti egyenlőtlenség is fennáll. 1 p

összesen 7 pont

2./ Kifejezésünk a következő alakba írható:

$$\frac{\sqrt{7-\sqrt{21+4\sqrt{5}}}}{1+\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$ 2 p

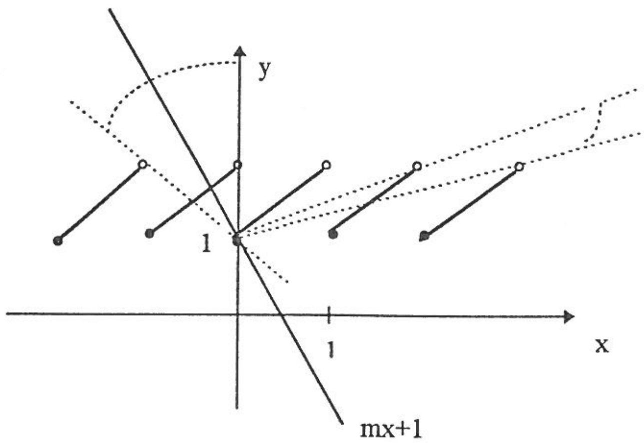
$$\frac{\sqrt{7-\sqrt{\left(2\sqrt{5}+1\right)^2}}}{1+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}$$ 2 p

$$\frac{\sqrt{7-2\sqrt{5}-1}}{1+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}$$ 1 p

$\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{4}$ 1 p Igy a kifejezés: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 1 p

összesen 7 pont

3./ Ábrázoljuk a $\{x\}+1$ függvényt! 2 p



Az $mx+1$ függvény képe a $(0;1)$ ponton átmenő, a jelölt tartományokba eső egyenes. 2 p

Tehát $\dfrac{1}{3} \leq m < \dfrac{1}{2}$ vagy $m \leq -1$ 2 p

összesen 6 pont

BOLYAI JÁNOS MEGYEI MATEMATIKAVERSENY feladatainak megoldása 1995/96. tanév
A szakközépiskolák és a gimnáziumok 2. osztálya,
a nyolcosztályos gimnáziumok 6. osztálya,
a hatosztályos gimnáziumok 4. osztálya számára.

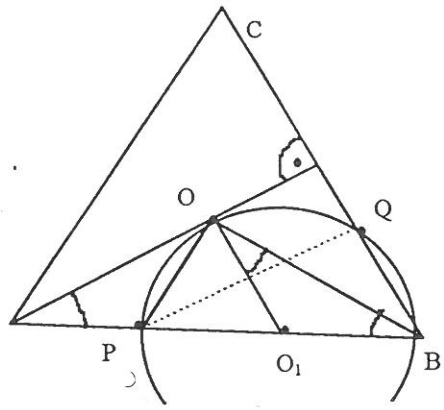
folytatás

4., a., AOB Δ és OBO_1 Δ egyenlőszárú,
így az egyíves szögek egyenlőek, 30°-osak.
Az $AO_1O \angle = 60°$, tehát $AOO_1 \angle = 90°$.
2 p

b., Thalesz tétele miatt $PQB \angle = 90°$,
így AO is és PQ is merőleges BC - re,
tehát párhuzamosak.
2 p

c., AP = PO, mert APO Δ egyenlőszárú. 1 p

PO = BQ, mert a PQB $\Delta \cong$ POB Δ
megfelelő oldalai. Igy AP = BQ
1 p



PO_1O Δ szabályos, így BP = 2PO = 2 AP, tehát AB = 3AP = 3BQ, így BC is háromszorosa a BQ - nak. 2 p

összesen 8 pont

5./ Kifejezésünk $n(n+2)(5n-1)(5n+1)$ alakba írható 1 p

Mivel $(3;8)=1$, elég bizonyítani, hogy a kifejezés osztható 3 - mal és 8 -cal is. 1 p

3 - mal való oszthatóság:
Ha n osztható 3 - mal, akkor a szorzat is osztható 3 - mal. 1 p
Ha n nem osztható 3 - mal, akkor 5n sem, így 5n-1 vagy 5n+1 osztható 3 - mal, így a szorzat is osztható 3 - mal. 2 p

8 - cal való oszthatóság:
Ha n páros, akkor n és n+2 közül az egyik 2 - vel, a másik néggyel osztható, tehát a szorzat 8 - cal osztható. 1 p
Ha n páratlan, akkor 5n-1 és 5n+1 közül az egyik 2 - vel, a másik néggyel osztható, tehát a szorzat 8 - cal osztható. 2 p

összesen 8 pont