Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1991.

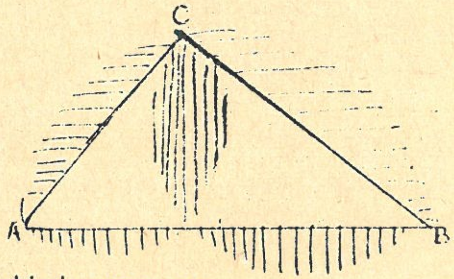
II. osztály

1./ Igazoljuk, hogy $p \geqq 5$ prímszám esetén p^2-1 osztható 24-gyel!

8 pont

2./ Egy derékszögű háromszög oldalaira az ábrán látható módon félköröket rajzolunk. Igazoljuk, hogy a vízszintesen vonalkázott területek összege egyenlő a függőlegesen vonalkázott területek összegével!

8 pont



3./ Oldjuk meg az

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-2p} + \frac{1}{x+3p} = \frac{3}{x}$$

egyenletet, ha x az ismeretlen és p adott valós szám!

10 pont

4./ Keressük azt a különböző számjegyekből álló háromjegyű $\overline{abc}$ számot, amely $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ számok számtani közepével egyenlő.

13 pont

5./ Hol veszi fel az $R \mapsto R$ $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$ a legnagyobb értékét? Határozza meg ezt az értéket!

11 pont

A feladatok elvileg különböző második megoldásáért az eredeti pontszám fele adható.

Szombathely, 1991. november

Bolyai János Matematikai Társulat
Vas Megyei Tagozata

Javítási útmutató

II. osztály

1./ $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ — 1 pont

Mivel $p \geqq 5$, ezért $p-1$ és $p+1$ páros, ami azt jelenti, hogy egyikük 4-gyel is osztható, tehát p^2-1 osztható — 3 pont

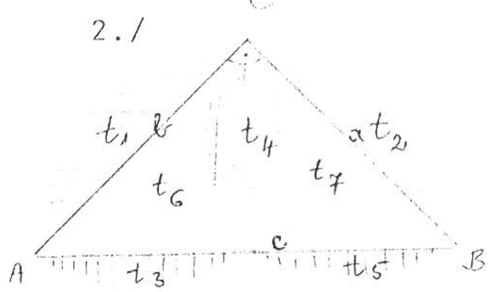
8-cal. — 1 pont

Továbbá a $p-1$, $p+1$ számok közül valamelyik osztható 3-mal, (hiszen 3 egymásutáni számról van szó), de $p \geqq 5$ miatt csak a $p-1$ vagy $p+1$ lehet ez a szám. — 2 pont

Tehát a p^2-1 osztható 24-gyel. — 1 pont

8 pont

2./



Pitagorasz tétel miatt:

$a^2+b^2=c^2$, innen — 1 pont

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$, azaz — 2 pont

a félkörök területei között a következő összefüggés áll fenn

$t_a + t_b = t_c$ — 2 pont

Az ábra jelöléseinek megfelelően tehát:

$t_1+t_6+t_4+t_7+t_2=(t_3+t_6+t_4)+(t_5+t_7+t_4)$, — 2 pont

innen: $t_1+t_2=t_3+t_4+t_5$ — 1 pont

8 pont

3./ $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-2p} + \frac{1}{x+3p} = \frac{3}{x}$

$x \neq p$, $x \neq 2p$, $x \neq -3p$, $x \neq 0$ — 1 pont

Rendezve az egyenletet, és elvégezve a lehetséges összevonásokat:

$$7p^2x = 9p^3$$ — 2 pont

$7p^2x-9p^3=0$

$p^2(7x-9p)=0$ — 2 pont

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, a lehetséges gyökök: — 1 pont

1.) $p=0$ esetén az egyenlet azonosság minden $x \in R$, $x \neq 0$ esetben — 2 pont

2.) $7x-9p=0$

$x = \frac{9p}{7}$ — 1 pont

Ellenőrzés — 1 pont

10 pont

4./ A keresett háromjegyű szám:

$100a + 10b + c$

ahol $a,b,c \in N$, $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ — 2 pont

és $a \neq b \neq c$

Ekkor a feltétel szerint:

$$100a+10b+c=\frac{100b+10c+a+100c+10a+b}{2}$$ — 2 pont

Rendezve: $7a=3b+4c$

$7a=3b+7c-3c$

$7(a-c)=3(b-c)$ — 3 pont

Mivel $a \neq c$ és $b \neq c$ az oszthatóságot vizsgálva

$7/(b-c)$ és $3/(a-c)$ — 2 pont

Figyelembe véve az a,b és c számokra tett feltételeket, a lehetséges értékek adódnak:

b:	9	8	7	2	1	0
c:	2	1	0	9	8	7

3 pont

Innen a keresett számok:

592, 481, 370, 629, 518, 407 — 1 pont

13 pont

5./ Azt kell megnézni, hol veszi fel a nevező a legkisebb értéket. — 2 pont

Mivel $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, — 3 pont

az $x=-1$ helyen veszi fel a minimumát, az — 2 pont

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+3}$$ mx. helye is $x=-1$ — 2 pont

$$f(-1)=\frac{1}{2}$$ — 2 pont

11 pont

Összesen: 50 pont