Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1989.

II. osztály

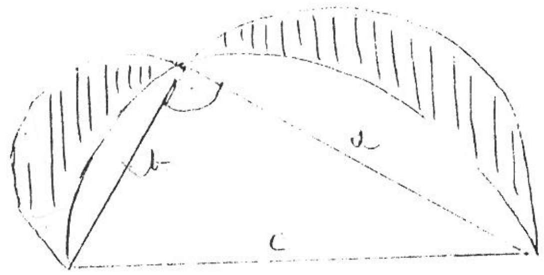
1. Hozza egyszerűbb alakra!

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

6 pont

2. Hypokratész holdacskái.
Bizonyítsa be, hogy a két "félhold" területének összegével egyenlő annak a derékszögű háromszögnek a területe amely köré a félköröket rajzoltuk!

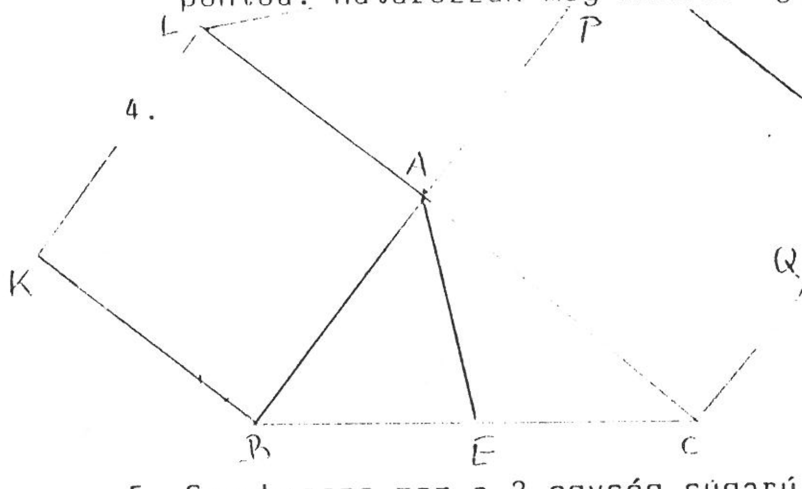
6 pont



3. Az egymástól 24 km távolságra levő A és B pontból egyszerre indul egymással szembe két gépkocsi. Találkozásuk után 16 perccel az a gépkocsi, amelyik az A pontból indult, megérkezik a B pontba; a másik pedig a találkozás után 4 perccel az A pontba. Határozzuk meg mindkét gépkocsi sebességét ($v_1;v_2$)!

8 pont

4.



Az ABC háromszög oldalaira kifelé szerkesszük meg az ABKL és CAPQ négyzeteket. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög AE súlyvonala merőleges a PL szakaszra és fele akkora!

8 pont

5. Szerkessze meg a 2 egység sugarú körbe írható szabályos tízszög oldalát, ha adott az egységnyi hosszúságú szakasz!

10 pont

Útmutató a versenydolgozatok értékeléséhez (1989.)

II. osztály

1. Hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{a+b+c}{-a+b+c} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc} = \qquad \text{3 pont}$$

$$= \frac{a+b+c}{-a+b+c} \cdot \frac{(b+c-a)\,.\,(b+c+a)}{2bc} = + \frac{(a+b+c)^2}{2\,bc} \qquad \text{2 pont}$$

Kikötések: $a \neq 0,\quad b \neq 0,\quad c \neq 0,\quad b = -c,$

$a = b+c,$ 1 pont

6 pont

2. Állítás: $t_1 + t_2 = t_3$ 1 pont

Bizonyitás:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi - /\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi - \frac{ab}{2}/ = t_1 + t_2$$

4 pont

$$\frac{1}{2}\,/\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2/\,\pi + \frac{ab}{2} = t_1 + t_2$$

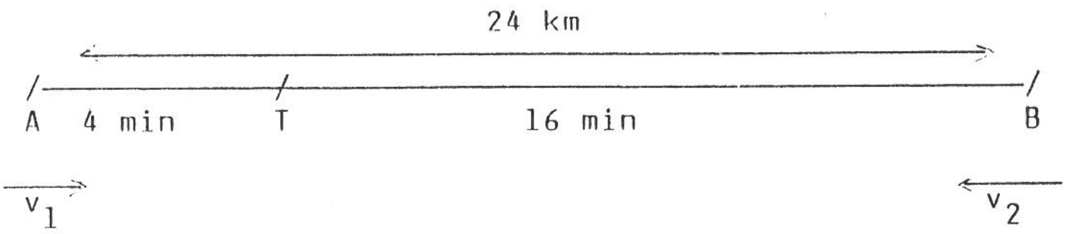
1 pont

A Pitagorasz tételből következik, hogy a zárójelben lévő kifejezés értéke 0. Így: $t_1 + t_2 = \frac{ab}{2}$

1 pont

6 pont

3.



	S (km)	v $\left(\frac{km}{h}\right)$	t (h)
I. AT	$\frac{1}{15}v_2$	v_1	$\frac{1}{15}\ \frac{v_2}{v_1}$
II. BT	$\frac{4}{15}v_1$	v_2	$\frac{4}{15}\ \frac{v_1}{v_2}$
I. TB	$\frac{4}{15}v_1$	v_1	$\frac{16}{60}$
II. TA	$\frac{1}{15}v_2$	v_2	$\frac{4}{60}$

14 pont

Mivel a két autó egyszerre indul, a találkozásig eltelt idők egyenlők!

$$\frac{1}{15}\,\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{15}\,\frac{v_1}{v_2}$$

2 pont

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = 4 \quad \text{ebből következik: } v_2 = 2\,v_1$$

$$v_2 = -2\,v_1 \quad \text{(nem megoldás!)}$$

A két autó együtt 24 km tett meg:

$$\frac{1}{15}\,2\,v_1 + \frac{4}{15}\,v_1 = 24$$

$$v_1 = 60 \text{ (km/h)} \qquad v_2 = 120 \text{ (km/h)}$$

2 pont

8 pont

4. Bizonyítás: két egyenes akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha valamelyiket bármilyen irányban 90^0-kal elforgatva, a másik egyenessel párhuzamos egyenest kapunk.

2 pont

Forgassuk el az ABC háromszöget az A csúcspont körül az ábra szerint pozitív irányban 90^0-kal. Ekkor a B pont az L pontba megy át, hiszen AB=AL. A C pont képe olyan C' lesz, amelyik az AP egyenesre esik és C'A=AP.

2 pont

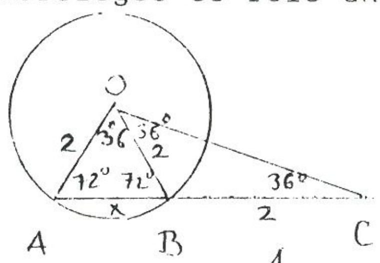
Az AE szakasz elforgatottja AE', a C'LP háromszög középvonala, mert E' az LC', A pedig a PC' oldal felezési pontja.

2 pont

Tehát AE', mint a PLC' háromszög középvonala párhuzamos LP-vel és fele akkora, így a rá merőleges AE szakasz az LP-re merőleges és fele akkora.

2 pont

8 pont



OAB háromszög hasonló OAC háromszöghöz, mert szögeik egyenlőek

2 pont

$x:2=2:(x+2)$

2 pont

$x^2+2x-4=0$

$(x+1)^2 = 5 \qquad x=\sqrt{5}-1$

2 pont

Szerkesztés

4 pont

10. pont