Bolyai János Matematika Verseny feladatai 1987-ben

II. osztály

1. Mutassa meg, hogy

$$\frac{10^{4n+1} + 2}{3} + \frac{10^{3n+3} + 2^3}{9}$$

egész szám, ha 'n' természetes szám!

/6 pont/

2. Legyen 'A' a sik azon pontjainak halmaza, amelyek x,y koordinátáira fennáll az $y \geq x^2 - 1$ egyenlőtlenség. A 'B' halmazba azok a pontok tartoznak, amelyekre $y \leq 3 - x$. Ábrázolja az 'A' és 'B' halmazok metszetét!

/6 pont/

3. Melyik az az egész szám, amelyet akár a 100-hoz, akár 164-hez adva négyzetszámot kapunk?

/8 pont/

4. Legyen A, B, C egy egyenes három pontja. /B az A és C között van./ Az egyenesnek ugyanarra az oldalára rajzolja meg az ABD és a BCE szabályos háromszögeket! Jelölje a CD szakasz felezőpontját P-vel, az AE szakaszét pedig R-rel! Igazolja, hogy a BPR háromszög szabályos!

/8 pont/

5. Pista vásárolt egy körzőt, egy ceruzát és egy radírt. Ha egy körző az ötödébe, egy ceruza a felébe és egy radír a kétötödébe kerülne, akkor 8 Ft-ot; ha egy körző a felébe, egy ceruza a negyedébe és egy radír a harmadába kerülne, akkor 12 Ft-ot fizetett volna. Mennyit fizetett? A körző-e vagy a ceruza a drágább?

/10 pont/

Utmutató a versenydolgozatok értékeléséhez

II. osztály

1. Alkalmazzuk a 3-mal és a 9-cel való oszthatósági szabályokat — 3 p

   Az 1. tag számlálója, olyan egész szám, melyben a számjegyek összege: 3, a 2. tagéban pedig 9 — 2 p

   Tehát a megadott kifejezés mindkét tagja, igy az összeg is egész szám — 1 p

   Összesen: 6 p

2. Az A halmaz helyes ábrázolása — 2 p

   A B " " " — 2 p

   Az A metszet B halmaz helyes ábrázolása — 2 p

   Összesen: 6 p

3. Legyen az ismeretlen egész szám x ; a két négyzetszám pedig a^2 és b^2. Igy: $x + 100 = a^2$ és

$$x + 164 = b^2$$

   Ebből $64 = b^2 - a^2 = /b-a/\cdot/b+a/$ — 3 p

   A $/b-a/$ is és a $/b+a/$ is szükségképpen páros. Indoklással — 2 p

$$/b+a//b-a/ = \begin{cases} 32\cdot 2, & \text{ebből } a=15,\ b=17 \text{ és igy } x=125 \\ 16\cdot 4 & \text{"}\quad a=6,\ b=10 \quad\text{"}\quad x=-64 \\ 8\cdot 8 & \text{"}\quad a=0,\ b=8 \quad\text{"}\quad x=-100 \end{cases}$$

   Ha a 0-t is négyzetszámnak tekintjük, 3 megoldás adódik — 3 p

   Összesen: 8 p

4. A helyes ábra, valamint az ABE és a DBC háromszögek egybevágóságának igazolása — 3 p

   $d_{BR}=d_{BP}$ /megfelelő sulyvonalak hossza/ /1/ — 2 p

   A két egybevágó háromszög 2-2 megfelelő oldala, és igy a megfelelő sulyvonalak is 60°-os szöget zárnak be /2/ — 2 p

   Az /1/ és /2/ -ből köv. az állítás — 1 p

   Összesen: 8 p

5. A körző árát jelölje x, a ceruzáét y, a radírét z.

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{2z}{5} = 8 \quad \text{és}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 12$$

Ebből: $2x+5y+4z= 80$ /1/

$6x+3y+4z=144$ /2/

/1/+/2/ osztva 8-cal: $x+y+z=28$ /Ft-ot fizetett/ 4 p

/2/-/1/ osztva 2-vel: $2x-y=32$ 3 p

Ebből: $x-y=32-x$

$32-x > 0$, mivel $x < 28$. Tehát a körző a drágább. 3 p

10 p