1985

Bolyai matematika verseny feladatok

II. osztály

1. András és Ferenc egy AB szakasz hosszát becsléssel állapitja meg. Ha András 10 %-al kevesebbre becsüli, ugy eltalálja a pontos értéket.
   Ha Ferenc becslése 10 %-al több lenne, akkor ő is eltalálná a pontos értéket. A két becslés közül melyiknél lesz a hiba abszolut értéke kisebb?

   / 6 pont /

2. Egy társaság közösen vásárolt egy ajándéktárgyat, azonban a számla kiegyenlitésekor négyen hiányoztak, és ezért mindenki 36.-Ft-tal többet fizetett be a tervezettnél. Ezután három távollévő megérkezett, és a költségek ujrafelosztása után a befizetők visszakaptak egyenként 30.-Ft-ot. Hányan voltak a társaságban, és mennyibe került az ajándéktárgy?

   / 6 pont /

3. Bizonyitsuk be, hogy a derékszögű háromszög befogóinak összege egyenlő a háromszögbe és a háromszög köré irt körök átmérőjének összegével!

   / 6 pont /

4. Bizonyitsuk be, hogy $482^n + 965^n + 2$ osztható 483-mal, ha n páratlan természetes szám!

   / 8 pont /

5. Bizonyitsuk be, hogy ha

   /1/ $xy = a^2b + ab^2$

   /2/ $x^2 - xy + y^2 = a^3 + b^3$

   /3/ és $a \neq \pm b$ akkor

   /4/ $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

   / 8 pont /

Szombathely, 1985. november 26.

Pontozási utmutató
II. osztály

1. feladat

Jelölje d a szakasz hosszát, és legyen x az András és y a Ferenc által becsült érték. Ekkor

$x-\frac{x}{10}=\frac{9x}{10}=d$, $x=\frac{10d}{9}$, igy a hiba 1/9 d — 3 pont

Hasonlóan $y+y/10=d$, $y=\frac{10d}{11}$, a hiba pedig $-\frac{1}{11}d$ — 2 pont

A két hiba abszolut értékének összehasonlitásából adódik, hogy Ferenc becsülte a szakaszt a kisebb abszolut értékü hibával — 1 pont

Ö: 8 pont

2. feladat

Legyen a társaság létszáma x, a fejenként tervezett befizetés y. Az első befizetés után

$/x-4/./y+36/=xy$, rendezve $9x-y=36$ — 2 pont

A visszatéritések után a hiányzó egyetlen tag részéről elmaradt befizetések pótlására x-1 tag mindegyike 36-30=6Ft-al fizetett többet, tehát

$/x-1/./y+6/=xy$, rendezve $y=6./x-1/$ — 2 pont

Az egyenletrendszer megoldása:

x=10 Fő , y= 54 Ft, az ajándéktárgy ára xy=540 Ft. — 2 pont

Ö: 6 pont

3. feladat

Legyen a háromszög két befogója a és b, az átfogója c. A háromszögbe irt kör sugara r, a köré irt kör sugara R.

A háromszög köré irt kör 2R átmérője a derékszögü háromszög c átfogójával egyenlő. A derékszög csucsából a beirt körhöz huzott érintőszakaszok hossza r. A hegyesszögü csucspontokból a beirt körhöz huzott érintőszakaszok a-r, és b-r hosszuak. — 3 pont

Igy $c=2R=a-r+b-r=a+b-2r$. Ebből

$2R+2r=a+b$, ami a bizonyitandó állitás. — 3 pont

Ö: 6 pont

4. feladat

A feladat a következőképpen alakitható át:

$482^n+1^n+965^n+1^n$, és — 2 pont

$482^n+1^n=/482+1/a$, továbbá

$965^n+1^n=/965+1/b$, igy az eredeti kifejezés — 4 pont

$483a+966b=483/a+2b/$ alakban irható, tehát osztható 483-al. — 2 pont

Ö: 8 pont

5. feladat

Adjuk hozzá /2/-höz /1/-nek háromszorosát, igy

$x^2+2xy+y^2=/x+y/^2=/a+b/^3$, másrészt vonjuk ki /1/-et /2/-ből,

akkor $x^2-2xy+y^2=/x-y/^2=a^2/a-b/+b^2/b-a/=/a-b/./a^2-b^2/=$

$=/a+b/./a-b/^2$ — 6 pont

Itt /3/ szerint egyik tényező sem 0, tehát $/x-y/^2\neq 0$.

Ezek után $\frac{/x+y/^2}{/x-y/^2}=\frac{/a+b/^3}{/a-b/^2./a+b/}=/\frac{a+b}{a-b}/^2$ — 2 pont

Ö: 8 pont

Szombathely, 1985. november