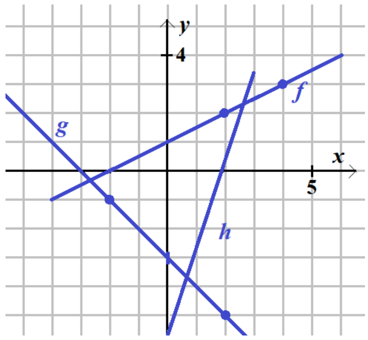
2017/2018. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

9. évfolyam



1. A jobb oldali ábrán három lineáris függvény grafikonja látható. ***f*** és ***g*** áthalad olyan rácspontokon, melynek mindkét koordinátája egész szám, a grafikonon két-két ilyen rácspont meg is van jelölve. A ***h*** függvényről azt tudjuk, hogy meredeksége 3 és zérushelye $\frac{17}{9}$.
   Mekkora területű háromszöget zár közre a három függvény grafikonja? Pontos értékekkel számolj!

2. a) Igazold, hogy ha egy ABCDEF konvex hatszög oldalai egyenlők, akkor az A-nál, C-nél és E-nél meghúzott szögfelezői egy ponton mennek át!

   b) Igazold, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők, akkor bármely két szomszédos oldal összege egyenlő a velük szemközti két oldal összegével!

3. Egy ipari üzem csarnokában három gép dolgozik. Az egyik 3 percenként szegecsel egyet, a másik 4 percenként hegeszt egyet, a harmadik 200 másodpercenként hangosan szisszen, mert gőzt ereszt ki. Amikor a csarnokba lépünk, egyszerre halljuk a három gép hangját.
   a) Mennyi ideig kell a csarnokban várnunk, hogy ismét egyszerre halljuk mindhárom gép hangját?
   b) Ez alatt az idő alatt hányszor halljuk egyszerre két gép hangját?
   c) Hányszor történik meg, hogy egy szegecselés (egyedüli) hangja után egyetlen hegesztési hang lesz a következő zaj?
   (Mindhárom gép hangja egy másodpercnél rövidebb.)

4. Egy ABEDC konvex ötszögre teljesül, hogy ABC szabályos háromszög és BEDC négyzet. Legyen AD és CE átlók metszéspontja M!
   a) Igazold, hogy AM = ME!
   b) Igazold, hogy AM = CM + MD!

5. Andi, Bea, Csilla és Dorka jó barátnők, egy osztályba járnak. Egyik nap együtt indultak haza, s megvitatták az aznapi eredményeiket. Összesen négy tárgyból kaptak osztályzatokat (l. táblázat) és mindegyikük legfeljebb egy jegyet szerzett egy adott tantárgyból. Kiszámolták a kapott jegyek átlagait két tizedesjegy pontossággal, tanulónként és tantárgyanként is, a jegyeket és az átlagokat végül egy táblázatba írták bele. Tudjuk, hogy Bea ugyanolyan osztályzatot szerzett németből, mint Dorka matematikából.
   Írd a táblázatba a szerzett osztályzatokat! *(A megoldás indoklással együtt teljes.)*

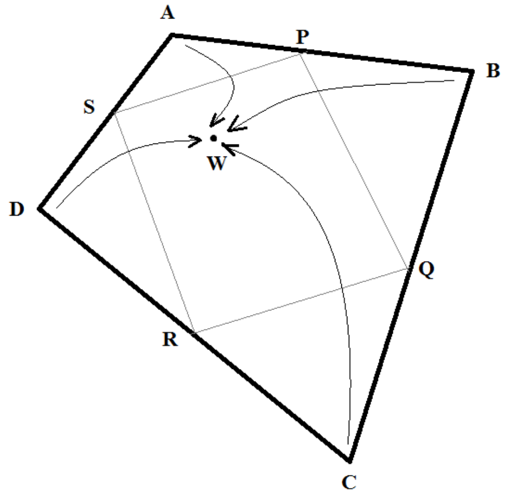
	Irodalom	**Történelem**	**Matematika**	**Német**	***Átlagok***
Andi					4,33
Bea					4,67
Csilla					3,75
Dorka					3,5
Átlagok	4,25	5	4,5	2,67	

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pont érhető el.

2017/2018. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

10. évfolyam

1. Négy pont: P, Q, R és S rendre az ABCD konvex négyszög AB, BC, CD és DA oldalán van. Ha papírból kivágjuk ABCD négyszöget, majd behajtjuk az ábra szerint PQ, QR, RS és SP szakaszok mentén, akkor Az A, B, C, D pontok mindegyike ugyanabba a W pontba kerül a behajtás után. (Az ábra nem pontos.)



   a) P, Q, R és S milyen négy pont a négyszögben?
   b) Milyen tulajdonságú ABCD konvex négyszögekkel lehet ezt megtenni (megfelelően választott P, Q, R, S pontokkal)?
   c) Egy ilyen ABCD négyszögben AB= 6 cm, BC=9 cm, CD= 7 cm. Mekkora a negyedik oldal?

2. Egy konzervgyár minőségbiztosítási részlegén két edényben gyümölcslé van. Az első edény 10 literes, benne 80%-os gyümölcslé van, a másik edény 5 literes, benne 40%-os gyümölcslé van, ennek mennyisége 48 deciliterrel kevesebb, mint az első edény tartalma. Az első edénybe annyi 30%-os gyümölcslevet öntenek, hogy az edény tele legyen, elkeverik, majd ebből az edényből teletöltik a másikat, így a második edényben 54 %-os gyümölcslé lesz. Pontosan hány liter gyümölcslé volt eredetileg a két edényben?

3. Érdekes, hogy a 145–öt kétféleképpen elő lehet állítani két pozitív négyzetszám összegeként: $145 = 9^2+8^2 = 12^2+1^2$. (Négyzetszámoknak az egész számok négyzeteit nevezzük.)
   a) Igazold, hogy ha két szám két különböző pozitív négyzetszám összegére bontható, akkor a szorzatukat többféleképpen is elő lehet állítani két négyzetszám összegeként!
   b) Van-e olyan szám, amelyet háromféleképpen is elő lehet állítani két pozitív négyzetszám összegeként? (Válaszodat indokold!)

4. Jelölje bármely x pozitív egész szám esetén $d(x)$ az x pozitív osztóinak számát!
   c) Mely kétjegyű pozitív egész x számokra teljesül, hogy $d(x) = 10$?
   d) Melyik a három legkisebb x pozitív egész szám, melyre $d(24x) = d(x) + 24$ teljesül?

5. a) Egy ABCDEF hatszög minden szöge tompaszög. Az A-nál levő szög egyenlő a B-nél levővel, hasonlóképp a C-nél és D-nél levő szögek, illetve az E-nél és F-nél levő szögek is egyenlők egymással. Igazold, hogy a hatszögnek van három olyan oldala, melyek felezőmerőlegesei egy ponton mennek át!
   b) Egy konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak. Igazold, hogy ha van beírt köre, akkor a szemközti oldalak egyenlők is!

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pontot érhet el.

2017/2018. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

11. évfolyam

1. a) Igazold, hogy az alábbi $k(x)$ kifejezés minden x pozitív egész számra egész értéket ad!

$$k(x) = \frac{9x^4 + 9x}{x^2 + x}$$

   b) Igazold, hogy ha x négyzetszám, akkor $k(x)$ értéke felírható két négyzetszám összegeként!
   (Négyzetszámoknak az egész számok négyzeteit nevezzük: 0, 1, 4, 9, 16, 25, stb.)

   c) Milyen pozitív egész x értékek esetén írható fel $x \cdot k(x)$ értéke két pozitív köbszám összegeként?
   (Köbszámoknak az egész számok köbeit nevezzük: 0, –1 , 1, –8, 8, –27, 27, stb.)

2. Négy pont: P, Q, R és S rendre az ABCD érintőnégyszög AB, BC, CD és DA oldalán van. Az A csúcs egyenlő távolságra van P és S pontoktól, B egyenlő távol esik P-től és Q-tól, C pedig egyenlő távol esik Q-tól és R-től.
   a) Igazold, hogy D csúcs is egyenlő távol esik R-től és S-től!
   b) Milyen speciális négyszög PQRS?
   c) Igazold, hogy ha ABCD érintőnégyszög két szemközti szöge derékszög, akkor ABCD deltoid!

3. Egy másodfokú egyenlet $x^2 + px + p + 35 = 0$ alakú, ahol p valamely valós szám.
   a) Milyen p értékek esetén teljesül, hogy az egyenlet valós gyökeinek szorzata nagyobb a gyökök összegénél?
   b) Írj fel olyan $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletet, melynek valós megoldásai az eredeti egyenlet valós megoldásainak négyzetgyökei! (Feladat a megfelelő a, b, c értékek legegyszerűbb alakú felírása p segítségével.) Mely p értékek esetén létezik ilyen egyenlet?

4. Oldd meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned} x^2y^2 + xy^3 &= 68 + y^3 \\ 4x^2 + 4xy + 31 &= 3y^2 + 4y \end{aligned}\right\}$$

5. Két derékszögű háromszög átfogója közös, területük 69 és 99 cm^2, közös részük területe 45 cm^2. Mekkora a derékszögű csúcsok pontos távolsága?

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pontot érhet el.

2017/2018. tanévi Bolyai János Megyei Matematikaverseny feladatai

12. évfolyam

1. ABC olyan derékszögű háromszög, melyben mindkét befogó hossza egész szám. Az A-ból induló szögfelező a BC befogót M pontban metszi. CM szakasz hossza 28%-a BM hosszának. Igazold, hogy az átfogóhoz tartozó magasság hossza felírható legfeljebb két tizedesjegyet tartalmazó véges tizedestörtként!

2. A 2880 összes pozitív osztóját felírjuk egy fekete táblára.
   a) Minden lehetséges módon kiválasztunk közülük kettőt, és kivonjuk a nagyobb számból a kisebbet. Ha a kapott különbség nem osztható hárommal, akkor felírjuk egy kék táblára. Hány (nem feltétlenül különböző) számot írtunk a kék táblára?
   b) A fekete táblán levő számok négyzeteit átmásoljuk egy zöld táblára. Mennyi a zöld táblán levő számok összege?

3. Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$(2\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x)\sqrt{8\cdot 4^x-2^{(x^2)}}>0$$

4. A koordináta-rendszerben egy háromszög két csúcsa: A(2018 ; 1992) és B(2070 ; 2018). A háromszög C csúcsa az $x+y=4052$ egyenletű e egyenesen van.
   a) Határozd meg a C csúcs lehetséges koordinátáit, ha tudjuk, hogy a háromszög derékszögű!
   b) Határozd meg a C csúcs lehetséges koordinátáit, ha tudjuk, hogy a háromszög területe 2535 területegység!

5. Egy 20 cm átmérőjű félgömb alakú gyümölcsöstál közepére helyezünk egy 10 cm átmérőjű, gömb alakú narancsot. Később a narancs köré 9 egyforma, gömb alakú mandarint teszünk, úgy, hogy mindegyik mandarin érintse a két szomszédját és a narancsot is, valamint egy ponton érintkezzen a tállal is.
   a) Mekkora a mandarinok átmérője?
   b) Ha ezután egy sík fémlappal lefedjük a tálat, hozzáér-e a mandarinokhoz?

Mindegyik feladat megoldásával maximum 20, összesen 100 pontot érhet el.