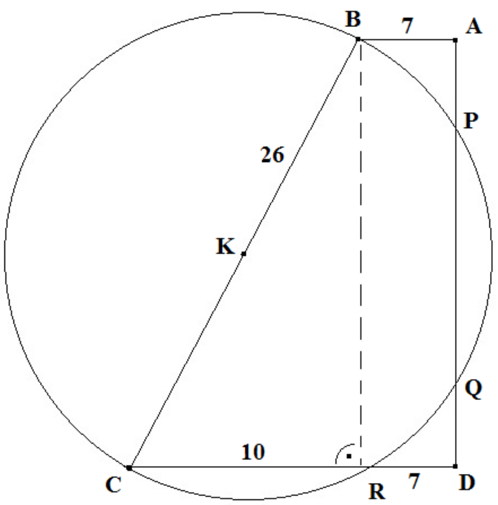
- A közölt megoldási utak a feladatoknak nem az egyetlen helyes megoldási módját adják meg, több eltérő megoldás is lehetséges.
- Az útmutatótól eltérő megoldásokat a kialakult tanári gyakorlat alapján, az útmutató pontjainak súlyozását alapul véve kell értékelni.
- Geometriai feladatok megoldásának elején a helyes ábrára jár az ott jelzett részpontszám, ha a versenyző az ábrát a szöveges leírásnak megfelelően használja.
- A feladatokat követő megjegyzések kitérnek néhány tipikus hibás megoldás pontozására.
- Minden évfolyamon 100 pont érhető el, minden iskolából a 50 ponton felüli dolgozatokat, illetve minden évfolyam három legjobbját kérjük beküldeni. Kérjük az összes olyan dolgozatok pontszámait, melyeket levélben nem küldtek el, de legalább 15 pontot elértek, a zsirp@freemail.hu címre elektronikus formában elküldeni.

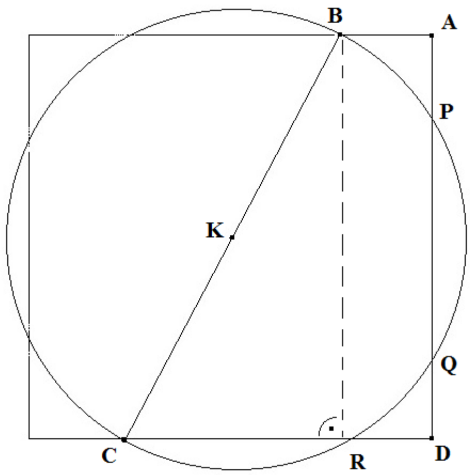
1. Pisti bűvészkedik. Ezt mondja Lalinak és Ferinek:
–Gondoljatok egy háromjegyű természetes számra, és írjátok fel egy-egy papírra, hogy ne lássam! Vegyétek a felírt számotok utolsó jegyét, szorozzátok meg 2-vel, majd adjatok hozzá 3-at! Az eredményt szorozzátok meg öttel, majd adjátok hozzá a papírra írt számotok középső számjegyét! A kapott eredményt ismét öttel szorozzátok, majd vegyetek el belőle 24-et! A kapott számot duplázzátok meg, majd adjátok hozzá a papírotokon levő háromjegyű szám első számjegyét! Lali, most mondd meg az eredményedet!
–Az eredményem 538 lett.
–Egy pillanat… Akkor Lali, te a 634-re gondoltál!
   a) Hogyan tudta Pisti ezt megmondani?
   b) Melyik számra gondolt Feri, ha az ő eredménye 500 lett?

Megoldás	**pont**
Legyen a gondolt szám $\overline{xyz}$ alakú! Ekkor Pisti műveletei így írhatók le: $\{[(2z+3)\cdot 5+y]\cdot 5-24\}\cdot 2+x$	**6**
A zárójelek felbontása után ezt kapjuk: $100z+10y+x+102$	**5**
Ez 102-vel több a $\overline{zyx}$ számnál, az eredeti szám „fordítottjánál".	**3**
a) Pisti az eredményből levon 102-t, majd a kapott szám jegyeinek sorrendjét megfordítja, így találja ki a gondolt számot.	**4**
b) Feri esetében 500–102=398, így gondolt száma 893.	**2**

Megjegyzések:
- *Ha a versenyző helyesen megadja Feri gondolt számát, de nincs rá megfelelő magyarázata, 5 pontot kaphat.*
- *Ha több konkrét szám vizsgálata alapján jut a versenyző helyes eredményre (algebrai indoklás nélkül), maximálisan 10 pontot kaphat.*

2. Egy ABCD négyszögben AB=7 cm, BC=26 cm, CD=17 cm, ADC∠=90°, BAD∠=90°. Tekintsük azt a *k* körvonalat, melynek BC az átmérője.
Számítsa ki, hogy a körvonalnak a négyszög kerületére eső pontjai milyen távol vannak a B csúcstól!

Megoldás	**pont**
 Az ABCD négyszög derékszögű trapéz. Legyenek a K középpontú körrel való metszéspontok P, Q és R.	**5**
Húzzuk be a B-ből induló *m* magasságot, ez a CD alapból 10 cm-es részt vág le. Thalész tétele miatt a magasság talppontja éppen az R pontba esik. Pitagorasz	**3**

<table>
<tr><td>tételével: $m^2+10^2=26^2$, ebből m=24 cm.</td><td></td></tr>
<tr><td>

24= 7+17, emiatt a négyszöget a K pontra tükrözve egy négyzetet kapunk, melynek K a középpontja. A négyzet szimmetriáiból következik, hogy AB=AP=DQ=DR=7 cm.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>A négyszög B csúcsának P-től és Q-tól való távolságai Pitagorasz tételével számolhatók:
$BQ^2=7^2+17^2$, ebből $BQ=\sqrt{338}\approx 18{,}38$
$BP^2=7^2+7^2$, ebből $BP=\sqrt{98}\approx 9{,}899$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>A körrel tehát 5 közös pont van: B, C, P, Q, R. Ezeknek B-től való távolságai:
BB=0, BC=26, BR=m=24, $BQ=\sqrt{338}\approx 18{,}38$ és $BP=\sqrt{98}\approx 9{,}899$.</td><td>2</td></tr>
</table>

Megjegyzések:

- *Szerkesztéssel és méréssel kapott eredmény nem ér pontot.*
- *Az első 5 pont a helyesen felrajzolt ábrára jár.*
- *Az R pont esetében a Thalész-tétel vagy más indoklás nélkül a megfelelő 3 pontból csak 1 pont adható.*

3. Igazolja, hogy a következő x és y számok pozitív egészek, és adja meg mindkét szám prímtényezős felbontását!

$$x=\frac{2016^{20}-2015^{20}}{2016^{10}+2015^{10}}+\frac{2016^{20}-2015^{20}}{2016^{10}-2015^{10}}$$

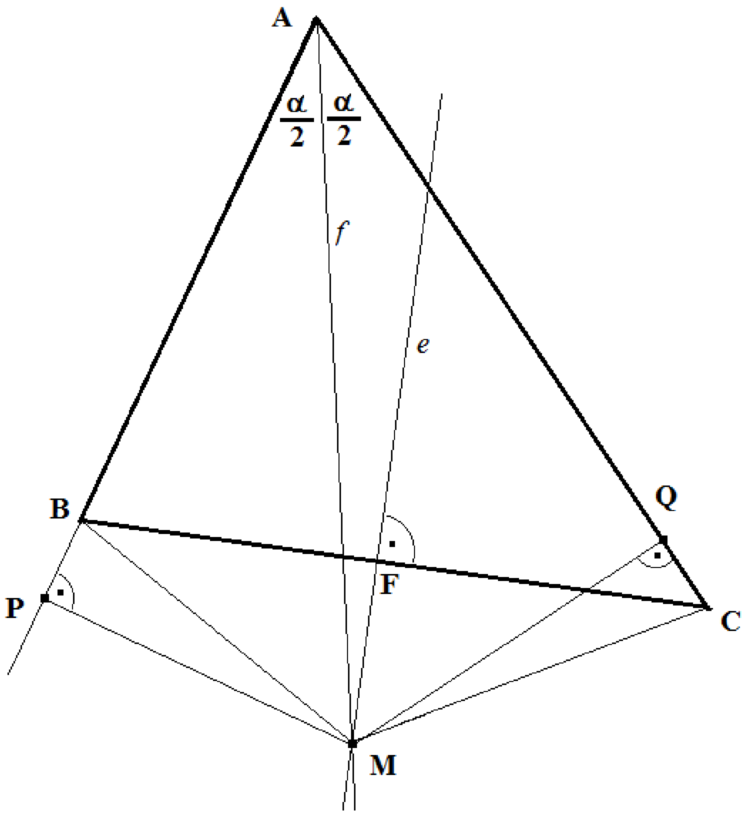
$$y=\frac{3^{6045}+2^{2015}\cdot 3^{4031}+3^{2016}\cdot 2^{4030}+2^{6045}}{3^{4030}+2^{2016}\cdot 3^{2015}+2^{4030}}+\frac{3^{4030}-6^{2015}}{3^{2015}}$$

Megoldás	**pont**
Vezessük be a következő jelöléseket: $a=2016^{10}$ *és* $b=2015^{10}$. Ekkor $$x=\frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{a-b}=a-b+a+b=2a=2\cdot 2016^{10}$$	5
Mivel $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$, emiatt $x=2\cdot(2^5\cdot 3^2\cdot 7)^{10}=2^{51}\cdot 3^{20}\cdot 7^{10}$.	3
Vezessük be a következő jelöléseket: $c=3^{2015}$ és $d=2^{2015}$. Ekkor $$y=\frac{c^3+3c^2d+3cd^2+d^3}{c^2+2cd+d^2}+\frac{c^2-cd}{d}=\frac{(c+d)^3}{(c+d)^2}+\frac{c(c-d)}{c}=$$	6+3
$=c+d+c-d=2c=2\cdot 3^{2015}$. Ez az y prímfelbontása is egyben.	3

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli eredmény nem ér pontot.*
- *Az y számításánál a 6+3 pont az első és a második törtbeli szorzattá alakításért jár.*

4. ABC háromszögben AB=15 cm, BC=17 cm, AC=20 cm. Legyen M pont a BC oldal felezőmerőlegesének és az A-nál levő szög belső szögfelezőjének a metszéspontja. M-ből bocsásson merőlegeseket az AB és az AC oldal egyenesére. E két merőlegesnek az oldalegyeneseken levő talppontjait jelölje P és Q.
   a) Igazolja, hogy PB=QC!
   b) Számítsa ki, mekkora a PB szakasz!

Megoldás		**pont**
	 Készítsünk ábrát, legyen BC oldal felezőpontja F.	**5**
a)	APM és AQM háromszögek egybevágók, mert két szögük ($\alpha/2$ és 90°), valamint AM oldaluk egyenlő. Emiatt PM=MQ és AP=AQ is igaz.	**4**
	Mivel M rajta van BC szakasz *e* felezőmerőlegesén, ezért BM=CM.	**2**
	Így PBM és QCM háromszögek egybevágók, mert két oldaluk és a nagyobbikkal szemközi (derék)szögük egyenlő.	**2**
	Tehát minden oldaluk egyenlő, így PB=QC.	**2**
b)	Legyen PB és QC szakasz hossza *x*, ekkor a fentebb igazolt AP=AQ egyenlőség így írható fel: $15+x = 20-x$, azaz $2x=5$, így $x=2{,}5$ (cm)	**5**

Megjegyzések:

- *Az első 5 pont a helyesen felrajzolt ábrára jár. (Nem ér pontot, ha pl. a versenyző a P és Q pontok mindegyikét az oldalakon belül vagy mindkettőt az oldalakon kívül veszi fel.)*
- *Szerkesztéssel és méréssel kapott eredmény csak 5 pontot ér – ez az ábrára adható pontszám.*
- *A b) rész esetében indoklás nélkül adott helyes eredményért 2 pont adható.*

5. Adott száz pozitív racionális szám: $x_1, x_2, x_3, \dots x_{100}$. Igaz rájuk a következő egyenlőség:

$$\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_1x_2}+\frac{x_3-1}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{x_{100}-1}{x_1x_2x_3\dots x_{100}}=\frac{1}{2}$$

Igazolja, hogy a száz szám között van olyan, mely kisebb $\sqrt[100]{2}$-nél!

Megoldás	**pont**
A bal oldalt alakítva: $$\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_1x_2}+\frac{x_3-1}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{x_{100}-1}{x_1x_2x_3\dots x_{100}}=$$ $$=\frac{x_1}{x_1}-\frac{1}{x_1}+\frac{x_2}{x_1x_2}-\frac{1}{x_1x_2}+\frac{x_3}{x_1x_2x_3}-\frac{1}{x_1x_2x_3}+\cdots$$ $$\dots+\frac{x_{100}}{x_1x_2x_3\dots x_{100}}-\frac{1}{x_1x_2x_3\dots x_{100}}=$$ $$=1-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{x_1x_2x_3}+\dots+\frac{1}{x_1x_2x_3\dots x_{99}}-\frac{1}{x_1x_2x_3\dots x_{100}}=$$ $$=1-\frac{1}{x_1x_2x_3\dots x_{100}}$$	**10**
Tehát $$1-\frac{1}{x_1x_2x_3\dots x_{100}}=\frac{1}{2}$$ ebből $x_1x_2x_3\dots x_{100}=2$	**3**
A számok racionálisak, ezért egyikük sem lehet $\sqrt[100]{2}$.	**2**
Ha mindegyik szám nagyobb lenne $\sqrt[100]{2}$ -nél, akkor szorzatuk 2-nél nagyobb lenne, ami ellentmond a fenti egyenlőségnek. Emiatt a számok közt van $\sqrt[100]{2}$ -nél kisebb.	**5**