- A közölt megoldási utak a feladatoknak nem az egyetlen helyes megoldási módját adják meg, több eltérő megoldás is lehetséges.

- Az útmutatótól eltérő megoldásokat a kialakult tanári gyakorlat alapján, az útmutató pontjainak súlyozását alapul véve kell értékelni.

- Geometriai feladatok megoldásának elején a helyes ábrára jár az ott jelzett részpontszám, ha a versenyző az ábrát a szöveges leírásnak megfelelően használja.

- A feladatokat követő megjegyzések kitérnek néhány tipikus hibás megoldás pontozására.

- Minden évfolyamon 100 pont érhető el, minden iskolából a 50 ponton felüli dolgozatokat, illetve minden évfolyam és kategória három legjobbját kérjük beküldeni. Kérjük az összes olyan dolgozatok pontszámait, melyeket levélben nem küldtek el, de legalább 15 pontot elértek, a zsirp@freemail.hu címre elektronikus formában elküldeni.

1. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

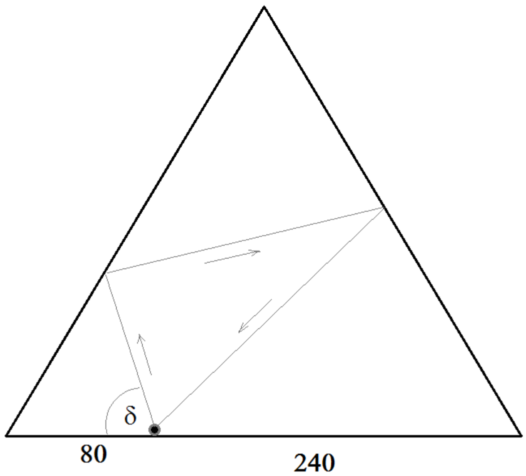
$$\left.\begin{aligned} x^2 \cdot 10^{3y} &= 10^{13} \\ x^y &= 100 \end{aligned}\right\}$$

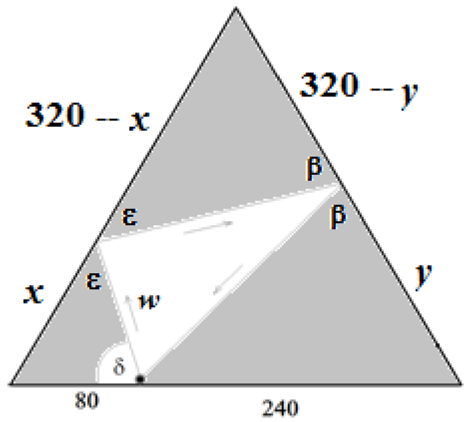
Megoldás:	**pont**
Az egyenletek jobboldalai pozitívak, ezért a baloldalak is, így mindkét egyenlet mindkét oldalának ltízes alapú logaritmusát vehetjük: $$\left.\begin{aligned} \lg(x^2 \cdot 10^{3y}) &= 13 \\ \lg(x^y) &= 2 \end{aligned}\right\}$$	**5**
Azonosságokat alkalmazva: $$\left.\begin{aligned} 2 \cdot \lg x + 3y &= 13 \\ y \cdot \lg x &= 2 \end{aligned}\right\}$$	**3**
Vezessünk be egy új *w* ismeretlent lg*x* helyére! $$\left.\begin{aligned} 2w + 3y &= 13 \\ wy &= 2 \end{aligned}\right\}$$	**3**
Fejezzük ki *w*-t az első egyenletből és helyettesítsük a másik egyenletbe: $(6{,}5 - 1{,}5y)y = 2$ Ennek megoldásai: $y_1 = 4$ és $y_2 = \frac{1}{3}$.	**5**
Ha y_1=4, akkor w_1=0,5 és $x_1 = \sqrt{10}$. Ha $y_2 = \frac{1}{3}$, akkor w_2=6 és x_2=1 000 000.	**2**
Ezek valóban megoldások, behelyettesítve igaz egyenleteket adnak.	**2**

Megjegyzések:

- *Levezetés és indoklás nélküli helyes megoldás nem ér pontot, az utolsó 2 pont adható, ha a gyökök ellenőrzése megvan.*
- *Az ellenőrzés indokolt, mert a feladatmegoldás elején nem volt alaphalmaz-vizsgálat (elvileg lehetne például mindkét egyenletben x negatív és y páros egész).*

2. Egy szabályos háromszög alakú billiárdasztal mindegyik oldala 320 cm. Az egyik oldal mentén, a csúcstól 80 cm-nyire van egy billiárdgolyó. Milyen irányban kell a golyót ellökni, hogy két (tökéletesnek tekinthető) visszaverődés után visszatérjen az eredeti helyzetébe? (Az irányt az ábrán látható δ szög nagyságával adja meg!)



Megoldás:	**pont**
 A golyó két pattanási helyéig terjedő két szakaszt jelöljük x-szel és y-nal a két oldalon. Mindkét pattanásnál egyenlő ε és β szögek keletkeznek, az ábra ezeket is mutatja.	2
Az eredeti háromszögből így három kisebbet vágtunk le, ezek hasonlók (az ábrán színezve látszanak). Mindegyiknek van ugyanis egy 60°-os szöge, és egy ettől különböző szöge megegyezik a következő szomszédos háromszög egy szögével. Ebből az okoskodásból ε=δ is következik.	5
A hasonlóság miatt az oldalak aránya megegyezik a három háromszögben: $$\frac{80}{x}=\frac{320-y}{320-x}=\frac{y}{240}$$	5
Az első és az utolsó arányt összevetve: xy=19 200. Az első és a második arányt összevetve: 80(320–x)=x(320–y)	2
A második egyenlőségből: 25 600–80x=320x–xy Beírva az első egyenlőséget : 25 600–80x=320x–19 200 Ebből x=112 (cm) és y= $\frac{1200}{7}$	3
A δ szög koszinusz-, majd szinusztétellel számítható a bal oldali kis háromszögből: $$w^2=80^2+112^2-2\cdot 80\cdot 112\cdot \cos 60°$$ w=99,92 (cm) $$\frac{w}{\sin 60°}=\frac{112}{\sin\varepsilon}$$ ebből ε= 76,10°.	3

Megjegyzések:

- *A feladat megoldható a golyónak az oldalakra való tükrözésével is.*
- *A szerkesztésről mért megoldás nem ér pontot.*

3. Hány olyan összetett természetes szám van az [1; 2015] intervallumban, melynek legnagyobb valódi osztója a [300; 500] intervallumba esik?

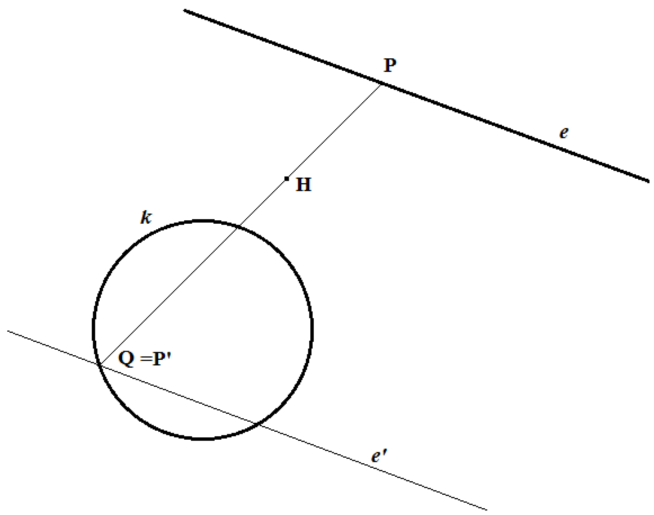
Megoldás:	**pont**
Ha egy x összetett szám legnagyobb valódi osztója n, akkor x/n a szám legkisebb prímosztója.	2
Ha ezt a legkisebb prímosztót p-vel jelöljük, akkor $pn=x$ és 300≤n≤500 miatt p értéke 2, 3 vagy 5 lehet, (7 már nem, mert 7·300>2015)..	3
Ha p=2, akkor n az összes szám lehet a [300; 500] -ban, ez 500–300+1=**201 eset**. Ezzel megszámoltuk az összes olyan x számot, melynek legkisebb prímosztója 2.	2

Ha p=3, akkor azok a számok lehetnek az n-nek a [300; 500]-ban, melyek nem párosak, mivel az ilyen páros n-ekre az x=3n szám legkisebb prímosztója 2 lenne, és az ilyen számokat már beszámoltuk. Az első ilyen nem páros szám az intervallumban a 301, az utolsó pedig 499, tehát az ilyen lehetséges n számok darabszáma $\frac{499-301}{2}+1=\mathbf{100}$	3
Ha p=5, akkor 2015:5=403 miatt $n\in$[300; 403].	2
Ez esetben azok lehetnek n-ek, melyek páratlanok és 3-mal nem oszthatók a megadott intervallumban –mivel a párosak és a 3-mal oszthatók esetén x=5n legkisebb prímosztója nem 5 lenne, hanem 2 vagy 3.	2
Ezek a számok a 6k+1 és a 6k+5 alakú számok (k egész értékeire). A 6k+1 alakú számok közül a legkisebb a 301, a legnagyobb a 403 a megadott intervallumban, ezért ezeknek száma $\frac{403-301}{6}+1=\mathbf{18}$. A 6k+5 alakú számok közül a legkisebb a 305, a legnagyobb a 401 a megadott intervallumban, ezért ezeknek száma $\frac{401-305}{6}+1=\mathbf{17}$.	5
Összesen tehát 201+100+18+17=336 darab szám legnagyobb valódi osztója esik a [300; 500].intervallumba.	1

Megjegyzések:

- *A feladat megoldható más logikájú összeszámolással is.*
- *Indoklás nélküli helyes eredményekre a megfelelő pontszám felének egészrésze adható.*

4. A koordináta-rendszerben egy PQ szakasz P végpontja az e: x+2y=14 egyenletű egyenesre, Q végpontja pedig a $k: x^2+y^2+2x+12y-13=0$ egyenletű körre illeszkedik. PQ szakasz P-hez közelebbi harmadolópontja a H(2;–1) pont. Határozza meg a P és Q pontok koordinátáit!

Megoldás:	**pont**
 Ha az e egyenesre alkalmazunk egy λ= –2 arányú, H középpontú középpontos hasonlóságot, akkor a kapott e' egyenesnek a k körrel való metszéspontja(i) éppen a keresett Q ponto(ka)t adják.	7
Az e' egyenletének felírásához elég, ha e egy pontjára alkalmazzuk az említett középpontos hasonlóságot, mert az ezen átmenő párhuzamos lesz e'. Az e egyenes egy pontja lehet például az E(0; 7) pont, mely teljesíti az e egyenletét. Ezután $\overrightarrow{EH}(2;-8)$ vektor kétszeresét kell H-ba eltolni: $(2\cdot\overrightarrow{EH})(4;-16)$ és E'(6;–17). e és e' normálvektora megegyezik, $\mathbf{n}_{e'}(1;2)$, emiatt e' : x+2y= –28	4

e’ és *k* metszéspontját vagy metszéspontjait egyenletrendszerrel határozhatjuk meg: $\left.\begin{matrix} k: x^2+y^2+2x+12y-13=0 \\ x+2y=-28 \end{matrix}\right\}$ A második egyenletből kifejezve *x*-et és az elsőbe helyettesítve: $5y^2+120y+715=0$ Ebből $y_1=-11$ és $y_2=-13$. Hozzájuk tartozó *x*-ek: $x_1=-6$ és $x_2=-2$.	**6**
Tehát két lehetséges pontpár van, ezek a Q pontok koordinátái: $Q_1(-6;-11)$. és $Q_2(-2;-13)$. A hozzájuk tartozó P pontokat így kapjuk: . $\overrightarrow{Q_1H}(8;10)$ és $\overrightarrow{Q_2H}(4;12)$ vektorok felét kell H-ba eltolni, így $P_1(6;4)$. és $P_2(4;5)$.	**3**

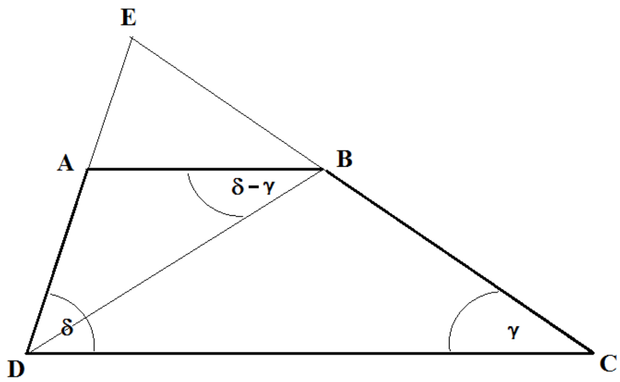
Megjegyzések:

- *Ábráról leolvasott helyes eredmény nem ér pontot.*
- *A feladat megoldható egyenletrendszerrel is.*

5. Az ábrán látható ABCD trapézban AB a rövidebb alap. A szárak meghosszabbításai az E pontban találkoznak. Az ABD szög egyenlő a trapéz hosszabbik alapján fekvő szögeinek különbségével.

a) Igazolja, hogy BD átló mértani közepe az alapoknak!

b) Igazolja, hogy EB mértani közepe ED-nek és EA-nak!



Megoldás:	**pont**
a):Mivel ABD∠ és BDC∠ váltószögek, ezért egyenlők és ADB∠= γ .	**2**
$BDC_\Delta \sim ABD_\Delta$, mivel két egyenlő szögük van.	**2**
A megfelelő oldalak aránya: $\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}$ Ebből $BD^2=AB\cdot DC$, azaz $BD=\sqrt{AB\cdot DC}$	**6**
b) Mivel ABE∠ és DCB∠ egyállású szögek, ezért egyenlők és ABE∠= γ .	**2**
$BEA_\Delta \sim DEB_\Delta$, mert mivel E-nél fekvő szögük közös, két egyenlő szögük van.	**2**
A megfelelő oldalak aránya: $\frac{BE}{DE}=\frac{EA}{EB}$ Ebből $BE^2=BA\cdot DE$, azaz $BE=\sqrt{BA\cdot DE}$	**6**

Megjegyzések:

- *Konkrét esetre adott számításért maximálisan a megfelelő pontszámok fele adható. Ahol a versenyző közelítő értékkel kezd számolni, onnantól nem kaphat pontot.*
- *Indoklás nélküli helyes megállapításért maximálisan a megfelelő pontszámok fele adható.*