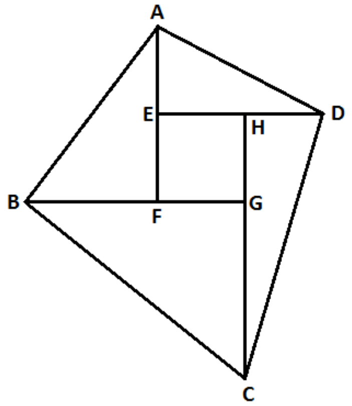
- A közölt megoldási utak a feladatoknak nem az egyetlen helyes megoldási módját adják meg, több eltérő megoldás is lehetséges.
- Az útmutatótól eltérő megoldásokat a kialakult tanári gyakorlat alapján, az útmutató pontjainak súlyozását alapul véve kell értékelni.
- Geometriai feladatok megoldásának elején a helyes ábrára jár az ott jelzett részpontszám, ha a versenyző az ábrát a szöveges leírásnak megfelelően használja.
- A feladatokat követő megjegyzések kitérnek néhány tipikus hibás megoldás pontozására.
- Minden évfolyamon 100 pont érhető el, minden iskolából a 40 ponton felüli dolgozatokat, illetve minden évfolyam három legjobbját kérjük beküldeni. Kérjük az összes olyan dolgozatok pontszámait, melyeket levélben nem küldtek el, de legalább 15 pontot elértek, a zsirp@freemail.hu címre elektronikus formában elküldeni.

1. A mellékelt ábráról a következőket tudjuk:
BC=$\sqrt{656}$ cm.
AB=20 cm
CD=25 cm.
BF=12 cm.
E felezőpontja AF-nek.
EFGH négyzet.
Mekkora az AD szakasz?



Megoldás	**pont**
ABF háromszög Pitagorasz-tételéből AF=16 cm.	**3**
Emiatt a négyzet EF oldala 8 cm hosszú.	**2**
Így BG=20 cm, a BCG háromszög Pitagorasz-tételéből GC=16 cm.	**5**
Így HC=24 cm, a HCD háromszög Pitagorasz-tételéből HD=7 cm.	**5**
Így ED=15 cm, a DAE háromszög Pitagorasz-tételéből AD=17 cm.	**5**

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli válasz nem ér pontot.*

2. a) Igazolja, hogy az x alapú számrendszerben leírt $1221_{(x)}$ szám nem lehet prímszám! (x értelemszerűen kettőnél nagyobb egész számot jelöl.)
b) Mely x pozitív egészek esetén lesz az $1221_{(x)}$ szám 3-mal osztható?

Megoldás	**pont**
A leírt szám értéke: $w = x^3+2x^2+2x+1$	**2**
$w = x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(x^2+x+1)$	**6**
Mivel egyik tényező sem lehet 1, ezért a szám nem lehet prím.	**2**
Ha x osztható 3-mal, akkor x=3k valamilyen pozitív egész k-ra, ekkor $w = 27k^3 + 18k^2 + 6k + 1$, azaz w nem osztható 3-mal.	**3**
Ha x 3-mal osztva 1 maradékot ad, akkor x=3k+1 valamely pozitív egész k-ra, ekkor $w = (3k+1)^3 + 2(3k+1)^2 + 2(3k+1) + 1 = 27k^3 + 45k^2 + 27k + 6$, azaz w osztható 3-mal.	**3**
Ha x 3-mal osztva 2 maradékot ad, akkor x=3k+2 valamely pozitív egész k-ra, ekkor $w = (3k+2)^3 + 2(3k+2)^2 + 2(3k+2) + 1 = 27k^3 + 72k^2 + 66k + 21$, azaz w osztható 3-mal.	**3**
Tehát w akkor osztható 3-mal, ha a számrendszer alapja nem osztható 3-mal.	**1**

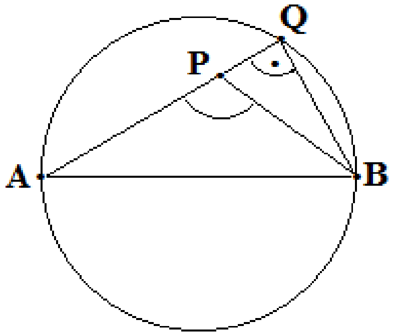
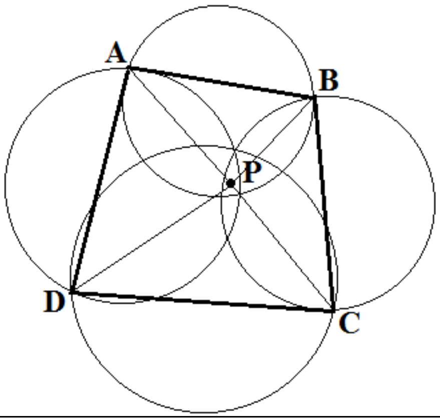
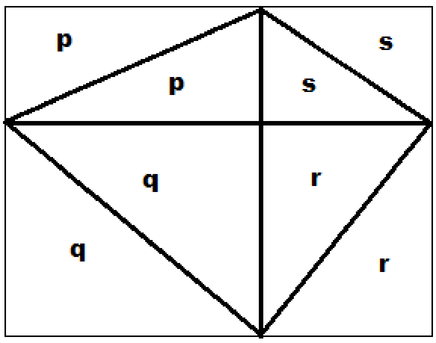
Megjegyzések:

- *Ha a versenyző megsejti. de nem igazolja, hogy w osztható x+1-gyel, akkor az első 8 pontból kettőt megkaphat.*
- *A b) résznél az indoklás nélküli helyes válasz 3 pontot ér.*
- *Ha a b) résznél kongruenciákkal dolgozik helyesen a versenyző, teljes a megoldása.*
- *Ha konkrét számokra kiszámítja a versenyző w értékét, és abból helyesen „jósol” a többi x esetére, akkor az a) részre maximum 3, a b) részre maximum 4 pontot kaphat.*

3. Egy négyszög mindegyik oldala mint átmérő fölé kört rajzolunk.

a) Igazolja, hogy a síkon nem lehet olyan pont, mely mind a négy körnek a belsejébe esik!

b) Ha van a négy körvonalnak közös pontja, továbbá a négyszög átlói 16 és 13 cm hosszúak, akkor mekkora a négyszög területe?

Megoldás	**pont**
 a) <u>Állítás</u>: Ha egy P pont egy AB szakasz Thalész-körének belsejébe esik, akkor APB szög tompaszög. Hosszabbítsuk meg ugyanis az ábra szerint AP szakaszt a körig, így keletkezik a Q pont. Thalész tétele miatt AQB∠=90°, emiatt QPB∠ hegyesszög, ezért a mellékszöge, APB∠ tompaszög.	**4**
 Ha ABCD konvex négyszöghöz létezne ilyen P pont, akkor az iménti állítás miatt tompaszög lenne APB∠, BPC∠, CPD∠ és DPC∠ is. Ez lehetetlenség, mert e négy szög összege 360° kell legyen.	**6**
 b) A Thalész-tétel értelmében ha van ilyen közös pont, abból mindegyik oldal derékszögben látszik, azaz az átlók merőlegesen metszik egymást.	**4**
Rajzoljunk a csúcsokon át az átlókkal párhuzamosokat! Így egy nagy téglalap keletkezik, melynek területe 16·13=208 cm^2.	**3**
Az ábrán azonos betűkkel jelölt háromszögek egybevágók, ezért területük megegyezik. Emiatt a négyszög területe fele a téglalapénak, azaz 104 cm^2.	**3**

4. Leírunk egymás mellé valahány 9-es számjegyet, majd ezek mögé ugyanannyi 0-t. A kilencesek és nullák közé egy 4-est, az egész számsor végére pedig egy 9-est írunk. (pl. 9999400009) Igazolja, hogy így mindig egy négyzetszámot kapunk!

Megoldás	**pont**
Ha *k* darab 9-est írunk le, annak értéke 10^k–1.	**2**
Ha ezután k+2 darab nullát írnánk, az eddigi szám $(10^k–1)\cdot 10^{k+2}$ lenne,	**2**
de a kilencesek után egy 4-es jön, ami így $4\cdot 10^{k+1}$-t ér, és a végén is van egy kilences, emiatt a szám így írható fel: $$10^{2k+2}-10^{k+2}+4\cdot 10^{k+1}+9$$	**5**
Átalakítva: $10^{2k+2}-10^{k+2}+4\cdot 10^{k+1}+9=10^{2k+2}-10\cdot 10^{k+1}+4\cdot 10^{k+1}+9=$	**6**
$=10^{2k+2}-6\cdot 10^{k+1}+9=$	**3**
$=(10^{k+1}-3)^2$, tehát mindig négyzetszámot kapunk.	**2**

Megjegyzések:

- *Ha a versenyző indoklás nélkül, de pontosan írja fel képlettel a fenti eredményt, 6 pontot kap érte.*
- *Ha a versenyző helyes példákat ad (pl.9997, 9999997), akkor legfeljebb 4 pontot kaphat.*

5. Egy napon anyuka a reggelihez tejet és kávét tett az asztalra. Minden családtag egyforma mennyiségű tejeskávét ivott meg, s az összes tej és kávé elfogyott. Béla az összes tej nyolcadrészét és az összes kávé hatodrészét itta meg. Hány tagú Béla családja?

Megoldás	**pont**
Legyen a család létszáma *x*, a tej mennyisége T , a kávéé K . Értelemszerűen *x* egész, T>0 és K>0. E jelölésekkel írunk fel egyenletet.	**2**
$$\frac{T}{8}+\frac{K}{6}=\frac{T+K}{x}$$	**2**
24-gyel való szorzás, majd átrendezés után: $$x=\frac{24T+24K}{3T+4K}$$	**4**
Átalakítva: $$x=\frac{18T+24K+6T}{3T+4K}=\frac{6(3T+4K)}{3T+4K}+\frac{6T}{3T+4K}=6+\frac{6T}{3T+4K}$$ Ebből K>0 és T>0 miatt *x*>6 adódik.	**5**
Felülről is becsülve: $$x=6+\frac{6T}{3T+4K}<6+\frac{6T+8K}{3T+4K}=6+2=8$$ Így *x*<8, azaz csak *x*=7 lehet.	**5**
Az eredeti egyenletben *x* helyére 7-et írva és ekvivalens módon átrendezve 3T=4K adódik. Ilyen tej-kávé arány mellett teljesül tehát a feladat feltétele, a családban heten vannak	**2**

Megjegyzések:

- *Indoklás nélküli helyes válasz 2 pontot ér.*
- *Ha a helyes válasz mellett kiszámítja a versenyző, hogy az milyen tej-kávé arány esetén valósul meg, akkor összesen 7 pontot kaphat.*