- A közölt megoldási utak a feladatoknak nem az egyetlen helyes megoldási módját adják meg, több eltérő megoldás is lehetséges.
- Az útmutatótól eltérő megoldásokat a kialakult tanári gyakorlat alapján, az útmutató pontjainak súlyozását alapul véve kell értékelni.
- Geometriai feladatok megoldásának elején a helyes ábrára jár az ott jelzett részpontszám, ha a versenyző az ábrát a szöveges leírásnak megfelelően használja.
- A feladatokat követő megjegyzések kitérnek néhány tipikus hibás megoldás pontozására.
- Minden évfolyamon 100 pont érhető el, minden iskolából a 40 ponton felüli dolgozatokat, illetve minden évfolyam és kategória három legjobbját kérjük beküldeni. Kérjük az összes olyan dolgozatok pontszámait, melyeket levélben nem küldtek el, de legalább 15 pontot elértek, a zsirp@freemail.hu címre elektronikus formában elküldeni.

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok körében!

$$2^{2x-1}\cdot 3^{x+1}-12^{2-x}-6^{x}\cdot 2^{x-1}=143$$

Megoldás:	**pont**
Átalakítva: $$\frac{2^{2x}\cdot 3^{x}\cdot 3}{2}-\frac{144}{12^{x}}-\frac{6^{x}\cdot 2^{x}}{2}=143$$ $$\frac{3}{2}\cdot 12^{x}-\frac{144}{12^{x}}-\frac{12^{x}}{2}=143$$	**8**
Új ismeretlent vezethetünk be: $y=12^{x}$	**3**
Ezzel: $$\frac{3}{2}\cdot y-\frac{144}{y}-\frac{y}{2}=143$$ $$y^{2}-143y-144=0$$ $$y_1=-1 \quad y_2=144$$	**4**
Az első esetben nincs megoldás.	**2**
Ha y=144, akkor x=2.	**3**

2. Adott a koordináta-rendszerben három pont: A(4; 0) , B(0; 3) és C(0; 0). Adja meg, milyen egyenletű alakzaton vannak azon P(*x; y*) pontok, melyekre teljesül a következő egyenlőség!

$$PA^2+PB^2=25+PC^2$$

Pontosan milyen geometriai alakzat ez?

Megoldás:	**pont**
Írjuk fel a megfelelő távolságképleteket és helyettesítsük a megadott egyenlőségbe! $$(4-x)^2+y^2+x^2+(3-y)^2=25+x^2+y^2$$	**7**
Átrendezve kapjuk az alakzat egyenletét $$16-8x+x^2+y^2+x^2+9-6y+y^2=25+x^2+y^2$$ $$x^2+y^2-8x-6y=0$$	**8**
Átalakítva: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$	**3**
Ez egy olyan kör egyenlete, melynek középpontja a K(4;3) koordinátájú pont, sugara pedig 5 cm.	**2**

Megjegyzések:

- Ha a versenyző csak kiszámol konkrétan néhány megfelelő pontot, akkor minden helyesen megtalált P pontért egy-egy pontot kapjon, maximálisan ötöt.
- Ha valaki (esetleg a P pontok alapján) megtalálja a helyes kört, de nem indokolja, miért felel meg ez a kör, maximálisan 10 pontot kapjon.

3. a) Adja meg az alábbi *f* függvény maximumának értékét!
   b) Adja meg a függvény összes minimumhelyét!

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\qquad f(x)=\frac{7}{3+\sin x-\cos^2 x}$$

Megoldás:	**pont**
a) $f(x)$ az átalakítása után könnyebben vizsgálható: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{7}{3+\sin x-(1-\sin^2 x)} = \dfrac{7}{\sin^2 x+\sin x+2}$	**2**
Jelöljük w-vel a $\sin x$ értékét, akkor $-1 \le w \le 1$	**2**
A nevezőnek nincs zérushelye, ezért a kifejezés minden x-re értelmes, és mint w konvex másodfokú függvénye, pozitív. $f(x)$-nek tehát akkor van maximuma, ha a nevező minimális, és akkor van minimuma, ha a nevező maximális.	**4**
Vizsgáljuk a nevezőt, a $g(w) = w^2 + w + 2$ függvényt, ha $-1 \le w \le 1$! A nevező grafikonja egy olyan konvex parabola része, melynek minimumhelye $w_{\min} = -\dfrac{b}{2a} = -0{,}5$ és a minimum értéke: $g(-0{,}5)=1{,}75$, azaz $f(x) \le \frac{7}{1{,}75} = 4$, ez $f(x)$ maximumértéke.	**6**
b) A $g(w)$ parabola növekedési viszonyai miatt a maximumát a -1 és az 1 helyen felvett függvényértékek közül a nagyobbik adja, ez $g(1)=\frac{7}{4}$, itt $f(x)$-nek minimuma van.	**4**
A minimumhelyek tehát $w=1$ esetén keletkeznek, azaz $\sin x=1$,	**1**
vagyis $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$	**1**

4. a) Igazolja (közelítő értékek használata nélkül), hogy az alábbi x szám racionális szám!

$$x = \sqrt{(\lg 5)^2 + \lg 0{,}4} - \lg \sqrt[3]{0{,}08}$$

b) Igazolja, hogy az alábbi y szám irracionális szám!

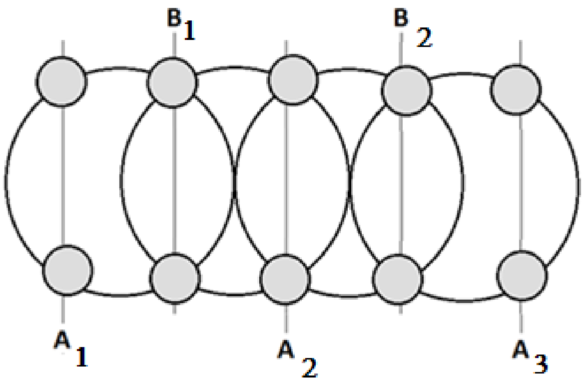
$$y = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{3}$$

Megoldás:	**pont**
a) Az első tag: $\sqrt{(\lg 5)^2 + \lg 0{,}4} = \sqrt{(\lg 5)^2 + \lg \dfrac{10}{25}} = \sqrt{(\lg 5)^2 - 2\lg 5 + 1} = \sqrt{(\lg 5 - 1)^2} = \lvert \lg 5 - 1 \rvert =$ $= 1 - \lg 5$	**6**
A második tag: $\lg \sqrt[3]{0{,}08} = \lg \sqrt[3]{\dfrac{8}{100}} = \lg \sqrt[3]{8} - \lg \sqrt[3]{100} = \lg 2 - \dfrac{2}{3}$	**3**
Tehát $x = 1 - \lg 5 - \lg 2 + \dfrac{2}{3} = 1 - \lg 10 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} \quad \in Q$	**2**
b) Tegyük fel, hogy $y \in$Q. Ekkor y felírható $y = \dfrac{p}{q}$, ahol p és q is pozitív egészek $y>0$ miatt.	**2**
Emiatt: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{3} = \dfrac{p}{q}$, azaz $\sqrt[3]{3} = \sqrt{2}^{\frac{p}{q}}$. Mindkét oldal q-adik hatványát tekintjük: $\sqrt[3]{3}^{\,q} = \sqrt{2}^{\,p} \quad \Rightarrow \quad 3^{2q} = 2^{3p}$	**4**
Mivel $p>0$, ezért a jobboldal páros, míg a baloldal páratlan – ez lehetetlen, emiatt y nem lehet racionális.	**3**

Megjegyzések:

- Amelyik résztől a versenyző közelítő értékkel kezd számolni, onnantól nem kap pontot.

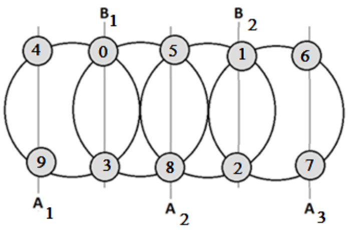
5. A mellékelt ábra kis köreibe valamilyen elrendezésben be kell írnunk a tíz számjegyet (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) azzal a feltétellel, hogy a nagy körökön levő négy-négy szám összege mindenütt ugyanannyi legyen.

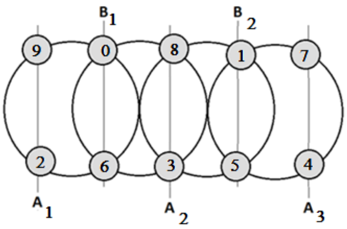


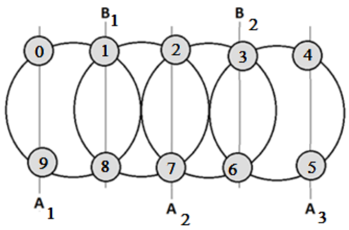
a) Igazolja, hogy a három A-val jelzett vonalon levő két-két-két szám összege megegyezik! Igazolja ugyanezt a két B-nél levő számösszegre is!

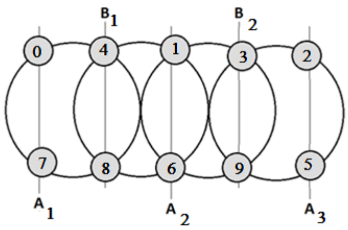
b) Hányféle lehet a számösszeg B jelű vonalaknál?

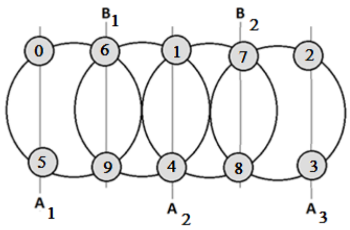
c) Hányféleképp lehet az ábrán levő kis köröket a feltételnek megfelelően a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekkel kitölteni?

<table>
<tr><td>Megoldás:</td><td>pont</td></tr>
<tr><td>a) Az A_1-gyel és A_2-vel jelzett vonalon levő két-két szám összege azért egyenlő,mert a B_1-en levő számokkal összeadva ugyanannyit adnak. Ugyanígy látható be a többi egyenlőség is.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b) A tíz szám összege 45, ami hárommal osztható. Az A-val jelzett három vonalon ugyanakkora a három számösszeg, így a két B-nél levő számösszeg is osztható 3-mal. De a legkisebb két szám összege 1, emiatt a „B” vonalak összege nem lehet 0, a legkisebb hat szám összege pedig 15, ami miatt a két „B”-nél legfeljebb (45-15):2=15 lehet, azaz csak 3, 6, 9, 12 és 15 lehet a két „B” vonalon levő számösszeg.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Ezek mindegyike meg is valósulhat:









</td><td>5</td></tr>
</table>

c)	Az öt közül négy fenti ábrán (a harmadik kivételével) az A és B vonalakon levő kétféle számösszeg nem valósulhat meg más számpárokkal. Indoklás: Nem jön ki másképp 3 összeg a „B” vonalakon, csak 1+2 és 0+3, (első ábra). A második ábra szerint ha a „B” vonalakon 6 az összeg, akkor 11 összeg kell legyen az „A” vonalakon, emiatt a 0 és az 1 nem lehet az „A” vonalakon. A negyedik ábrán az „A” jelű vonalakon 7-7 kell legyen az összeg, tehát a 8-as és 9-es csak „B” jelűn lehet. Az ötödik ábrán az „A” jelű vonalakon az összeg 5, ezért a 6, 7, 8, 9 számok csak a „B” jelű vonalakon lehetnek.	**2**
	E négy ábrából megkapható az összes eset úgy, hogy az A és B oszlopkat egymás között cseréljük, illetve ha az egy vonalon levő alsó és felső számok közül valahányat felcserélünk. Tehát 3!=6-féleképpen rendezhető el az „A” vonalakon a három számpár, kétféleképpen a „B” vonalakon a két számpár és a számpárok „kiosztása” után 2^5=32 lehetőség keletkezik a számpárok alsó és felső számainak cserélgetésével. Ez a négy ábrából összesen 4·6·2·32=1536 esetet ad.	**5**
	A harmadik ábrán minden számpár 9-et ad összegként, azaz bármelyik számpár bármelyik vonalon lehet. Ez 5!=120-féle lehetőség arra, hogy melyik számpár melyik vonalon legyen. Itt is 2^5=32 lehetőség keletkezik a számpárok alsó és felső számainak cserélgetésével, ezért összesen 120·32=3840 eset van.	**3**
	Az összes lehetőség tehát 1536+3840=5376	**1**